Gabarito da P3

Tabela 1: Respostas das alternativas corretas das questões **Q1-Q9** para as diferentes provas.

Prova	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	**Q5**	**Q6**	**Q7**	**Q8**	**Q9**
17XY9	a	b	c	b	a	b	c	d	e
33BC4	b	c	d	a	b	d	e	c	c
54DE1	c	a	b	c	c	c	a	e	d
88FF6	d	d	a	d	d	e	b	e	a

Para todas as questões:

- A aceleração da gravidade na superfície da Terra é representada por g.
- Quando necessário, adote para g o valor de $10\,\mathrm{m/s^2}$.
- Os vetores unitários associados às coordenadas cartesianas x, y e z são, respectivamente, $\vec{\boldsymbol{\imath}}$, $\vec{\boldsymbol{\jmath}}$ e $\vec{\boldsymbol{k}}$.

(Q1) [1,0 ponto] Considere as seguintes afirmações:

(I) A aceleração do centro de massa de um corpo rígido é igual ao quociente da força externa resultante pela sua massa total, desde que o corpo não tenha movimento de rotação.
(II) Um disco de raio R gira em torno de seu eixo com uma aceleração angular α. O módulo da aceleração de um ponto sobre as suas bordas vale αR.
(III) A energia cinética de um corpo rígido que apenas gira em torno de um eixo fixo depende somente da massa total e da velocidade angular do corpo.
(IV) Quando a força resultante sobre um corpo rígido é nula, não pode haver torque em relação ao seu centro de massa.
(V) A força resultante sobre um corpo rígido em rotação pura em torno de um eixo fixo no espaço e que passa pelo seu centro de massa é sempre nula.
(VI) Quando a velocidade do centro de massa de um sistema de partículas é nula, o seu momento angular é independente do ponto do espaço escolhido como referência.
(VII) Um corpo pode girar sem estar sujeito à ação de um torque.

O número de afirmações corretas é:

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4
(e) 5

Solução (Q1):

Cada prova tem 5 afirmações que foram escolhidas dentre as possibilidades abaixo:
(I) A aceleração do centro de massa de um corpo rígido é igual ao quociente da força externa resultante pela sua massa total, desde que o corpo não tenha movimento de rotação.
(I) Errado. A aceleração do centro de massa é independente da rotação do corpo.

(II) Um disco de raio R gira em torno de seu eixo com uma aceleração angular α. O módulo da aceleração de um ponto sobre as suas bordas vale αR.
(II) Errado. Este é o módulo da componente tangencial da aceleração. Há também uma componente radial para a aceleração, a aceleração centrípeta.

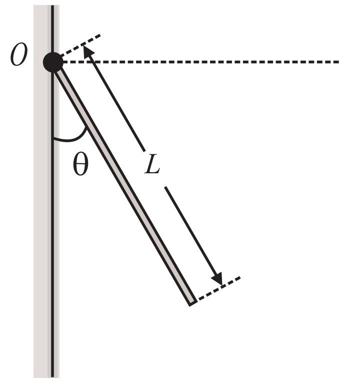
(III) A energia cinética de um corpo rígido que apenas gira em torno de um eixo fixo depende somente da massa total e da velocidade angular do corpo.
(III) Errado. Depende também da distribuição de massa, que influi sobre o momento de inércia.

(IV) Quando a força resultante sobre um corpo rígido é nula, não pode haver torque em relação ao seu centro de massa.
(IV) Errado. Pode haver torque mesmo que as forças se equilibrem.

(V) A força resultante sobre um corpo rígido em rotação pura em torno de um eixo fixo no espaço e que passa pelo seu centro de massa é sempre nula.
(V) Certo. O centro de massa não está acelerado e a força resultante é nula.

(VI) Quando a velocidade do centro de massa de um sistema de partículas é nula, o seu momento angular é independente do ponto do espaço escolhido como referência.
(VI) Certo. Consequência da expressão $\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{L}}_{CM} + M\vec{\boldsymbol{R}}_{CM} \otimes \vec{\boldsymbol{V}}_{CM}$.

(VII) Um corpo pode girar sem estar sujeito à ação de um torque.
(VII) Certo. Pode girar com vetor velocidade angular constante.



(Q2) [1,0 ponto] Uma barra homogênea de comprimento L e massa M está presa em uma de suas extremidades a uma parede vertical, conforme a figura ao lado. A barra gira sem atrito ao redor do ponto O, sendo abandonada na posição horizontal com velocidade inicial nula. O momento de inércia da barra em relação ao ponto O é $I = \frac{ML^2}{3}$ e a aceleração da gravidade local é g. No instante em que a barra faz um ângulo $\theta = 30°$ com a vertical, a aceleração angular da barra é:

(a) $\frac{3}{8}\frac{g}{L}$.

(b) $\frac{3}{4}\frac{g}{L}$.

(c) $\frac{2}{3}\frac{g}{L}$.

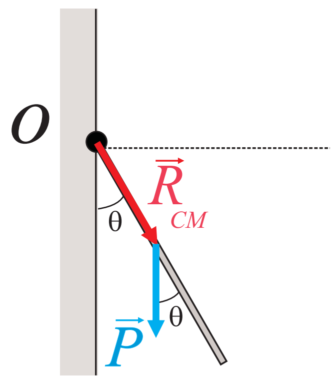
(d) $\frac{1}{2}\frac{g}{L}$.

(e) $\frac{1}{4}\frac{g}{L}$.

Solução (Q2):
A força que dará o torque na barra é a força peso ($\vec{\boldsymbol{P}}$). O torque é calculado como:

$$|\vec{\boldsymbol{\tau}}_\circ| = \vec{\boldsymbol{R}}_{CM} \otimes \vec{\boldsymbol{P}} = \left|\vec{\boldsymbol{R}}_{CM}\right| \left|\vec{\boldsymbol{P}}\right| \sin\theta = \frac{L}{2}(Mg)\sin\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{|\vec{\boldsymbol{\tau}}_\circ| = \frac{MLg}{2}\sin\theta}$$



onde o símbolo $\otimes$ indica o produto vetorial entre os vetores $\vec{\boldsymbol{R}}_{CM}$ e $\vec{\boldsymbol{P}}$. A aceleração angular é calculada como:

$$|\vec{\boldsymbol{\alpha}}| = \frac{|\vec{\boldsymbol{\tau}}_\circ|}{I} = \frac{\frac{MLg}{2}}{\frac{1}{3}ML^2}\sin\theta = \frac{3g}{2L}\sin\theta = \frac{3g}{2L}\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{|\vec{\boldsymbol{\alpha}}| = \frac{3g}{4L}}.$$

(Q3) [1,0 ponto] O vetor posição de uma partícula de massa m que move-se no plano xy é dado por $\vec{\boldsymbol{r}}(t) = r_x\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + r_y\,\vec{\boldsymbol{\jmath}}$, onde $\vec{\boldsymbol{r}}$ é dado em metros e t em segundos. O momento angular em relação à origem é:

(a) $\vec{\boldsymbol{L}} = -18\,t\,(\mathrm{J.s})\,\vec{\boldsymbol{k}}$

(b) $\vec{\boldsymbol{L}} = +24\,t\,(\mathrm{J.s})\,\vec{\boldsymbol{k}}$

(c) $\vec{\boldsymbol{L}} = -36\,t\,(\mathrm{J.s})\,\vec{\boldsymbol{k}}$

(d) $\vec{\boldsymbol{L}} = +48\,t\,(\mathrm{J.s})\,\vec{\boldsymbol{k}}$

(e) $\vec{\boldsymbol{L}} = +54\,t\,(\mathrm{J.s})\,\vec{\boldsymbol{k}}$

Solução (Q3):
Por definição, o momento angular é dado por $\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{p}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times m\vec{\boldsymbol{v}}$, onde $\vec{\boldsymbol{r}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}$ são o vetores posição e velocidade de translação da partícula, respectivamente. O vetor velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}(t)$ é dado por:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \frac{d(r_x\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + r_y\,\vec{\boldsymbol{\jmath}})}{dt} = v_x\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + v_y\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

Portanto, o momento angular é dado por:

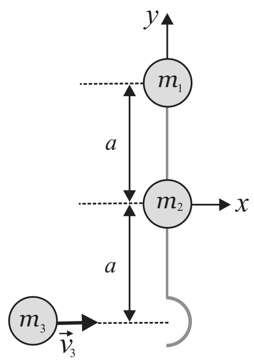
$$\vec{\boldsymbol{L}} = det\begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{\imath}} & \vec{\boldsymbol{\jmath}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ r_x & r_y & 0 \\ mv_x & mv_y & 0 \end{pmatrix} = mr_xv_y\,\vec{\boldsymbol{k}} - mv_xr_y\vec{\boldsymbol{k}}$$

Tabela 2: Respostas das alternativas corretas da questão **Q3** para as diferentes provas.

PROVA	m (kg)	r_x	r_y	v_x	v_y	$\vec{\boldsymbol{L}}$
54DE1	2	2	$+3\,t^2$	0	$+6\,t$	$+24t\,\vec{\boldsymbol{k}}$
17XY9	2	3	$-3\,t^2$	0	$-6\,t$	$-36t\,\vec{\boldsymbol{k}}$
33BC4	4	3	$+2\,t^2$	0	$+4\,t$	$+48\,t\vec{\boldsymbol{k}}$
88FF6	3	1	$-3\,t^2$	0	$-6\,t$	$-18t\,\vec{\boldsymbol{k}}$

Enunciado das questões (Q4) e (Q5).

O sistema representado ao lado, formado por duas partículas de massas m_1 e m_2, ligadas por uma haste em forma de gancho, de massa desprezível e comprimento $\ell = 2a$, pode deslizar sem atrito sobre o plano *horizontal xy*. Uma terceira partícula, de massa m_3, movendo-se sobre o plano com velocidade $\vec{\boldsymbol{v}}_3 = v_3\,\vec{\boldsymbol{\imath}}$, colide com o sistema formado pelas partículas m_1 e m_2, inicialmente parado, ficando presa no gancho.



(Q4) [1,0 ponto] A velocidade de translação do sistema depois da colisão é:

(a) $\vec{\mathbf{V}}_{CM} = (1v/2)\,\vec{\boldsymbol{\imath}}$.
(b) $\vec{\mathbf{V}}_{CM} = (2v/3)\,\vec{\boldsymbol{\imath}}$.
(c) $\vec{\mathbf{V}}_{CM} = (1v/3)\,\vec{\boldsymbol{\imath}}$.
(d) $\vec{\mathbf{V}}_{CM} = (1v/4)\,\vec{\boldsymbol{\imath}}$.
(e) $\vec{\mathbf{V}}_{CM} = (1v/6)\,\vec{\boldsymbol{\imath}}$.

Solução (Q4):
A força externa resultante no sistema antes e depois da colisão é nula. Durante a colisão, há apenas forças internas ao sistema formado pelas 3 partículas. Assim, a lei de conservação do momento linear se aplica, ou seja, podemos usar que o momento linear do sistema antes da colisão ($\vec{\boldsymbol{P}}_{antes}$) é igual ao momento linear do sistema depois da colisão ($\vec{\boldsymbol{P}}_{depois}$). O momento antes da colisão é dado por:

$$\vec{\boldsymbol{P}}_{antes} = M\vec{\boldsymbol{V}}_{CM} = m_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + m_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + m_3\vec{\boldsymbol{v}}_3$$

onde as massas m_1 e m_2 estão inicialmente paradas (portanto $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \vec{\boldsymbol{v}}_2 = 0$) e a massa total do sistema é $M = m_1 + m_2 + m_3$. Com isso teremos:

$$M\vec{\boldsymbol{V}}_{CM} = m_3\vec{\boldsymbol{v}}_3 = m_3 v_3\,\vec{\boldsymbol{\imath}} \Rightarrow \boxed{\vec{\boldsymbol{V}}_{CM} = \frac{m_3 v_3}{M}\vec{\boldsymbol{\imath}}}$$

(Q5) [1,0 ponto] Depois da colisão a velocidade angular de rotação do sistema em torno do seu centro de massa é:

(a) $\vec{\boldsymbol{\omega}} = (v/a)\,\vec{\boldsymbol{k}}$

(b) $\vec{\boldsymbol{\omega}} = (2v/a)\,\vec{\boldsymbol{k}}$

(c) $\vec{\boldsymbol{\omega}} = (v/2a)\,\vec{\boldsymbol{k}}$

(d) $\vec{\boldsymbol{\omega}} = (3v/2a)\,\vec{\boldsymbol{k}}$

(e) $\vec{\boldsymbol{\omega}} = (v/4a)\,\vec{\boldsymbol{k}}$

Solução (Q5):
As forças oriundas da colisão, não causam torque no sistema e como o torque resultante no sistema devido às forças externas é nulo, antes e depois da colisão, a lei da conservação do momento angular se aplica neste caso. O momento angular do sistema em relação ao centro de massa antes da colisão é dado por:

$$\vec{\boldsymbol{L}}_{cm}^{antes} = \vec{\boldsymbol{r}} \otimes \vec{\boldsymbol{p}} = \vec{\boldsymbol{r}}_{\perp} \otimes \vec{\boldsymbol{p}} = m_3 v_3 (\frac{\ell}{2})\, \vec{\boldsymbol{k}} = I\vec{\boldsymbol{\omega}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{\omega}} = \frac{m_3 v_3 (\frac{\ell}{2})}{I}\, \vec{\boldsymbol{k}}}$$

onde usamos que o momento de inércia do sistema girando ao redor do eixo z que passa pelo centro de massa é $I = m_1(\frac{\ell}{2})^2 + m_3(\frac{\ell}{2})^2$.

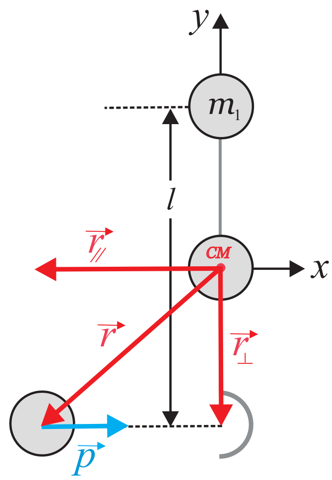
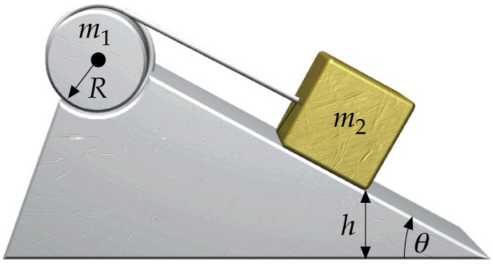


Tabela 3: Respostas das alternativas corretas da questões **Q4-Q5** para as diferentes provas.

PROVA	m_1	m_2	m_3	M	v_3	ℓ	I	$\vec{V}_{CM}$	$\vec{\omega}$
17XY9	m	m	m	$3m$	$2v$	$2a$	$2ma^2$	$\frac{2v}{3}\vec{\imath}$	$\frac{v}{a}\vec{k}$
33BC4	m	$2m$	m	$4m$	$2v$	a	$\frac{ma^2}{2}$	$\frac{v}{2}\vec{\imath}$	$\frac{2v}{a}\vec{k}$
54DE1	$2m$	$2m$	$2m$	$6m$	v	a	ma^2	$\frac{v}{3}\vec{\imath}$	$\frac{v}{a}\vec{k}$
88FF6	$2m$	$4m$	$2m$	$8m$	v	$2a$	$4ma^2$	$\frac{v}{4}\vec{\imath}$	$\frac{v}{2a}\vec{k}$

Enunciado das questões (Q6) e (Q7).

Um cilindro uniforme de massa m_1 e raio R está apoiado num eixo horizontal, podendo girar livremente, sem atrito. Uma corda enrolada no cilindro prende um bloco de massa m_2, que pode deslizar sem atrito sobre um plano inclinado de ângulo θ, como mostra a figura. O sistema é solto, a partir do repouso, quando m_2 está a uma altura $\boldsymbol{h}$ acima da horizontal.



Adote:
⋆ Momento de inércia de um cilindro de massa M e raio R em relação ao eixo de rotação que passa pelo seu centro de massa é $I = \frac{1}{2}MR^2$.

(Q6) [1,0 ponto] Considerando que a corda não desliza sobre o cilindro, a aceleração de m_2 é:

(a) $a = \frac{(m_1+2m_2)g\sin\theta}{m_1+m_2}$.

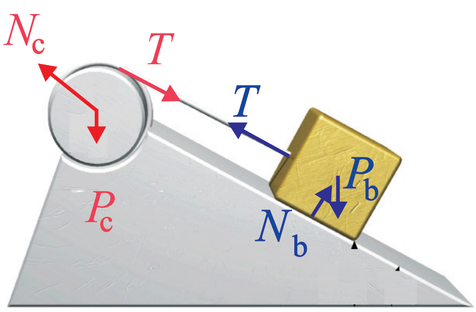
(b) $a = \frac{2m_2 g\sin\theta}{m_1+2m_2}$.

(c) $a = \frac{m_2 g\sin\theta}{m_1+2m_2}$.

(d) $a = \frac{m_1 g\sin\theta}{2m_1+m_2}$.

(e) $a = \frac{2m_1 g\sin\theta}{m_1+2m_2}$.

Solução Q6:
Na figura abaixo está o diagrama de forças sobre o cilindro e sobre o bloco.



A normal (N_c) e o peso (P_c) do cilindro não exercem torques em relação ao eixo de rotação. O torque no cilindro é gerado pela tensão na corda, que causa sua aceleração angular,

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{TR}{I}. \qquad (1)$$

A aceleração tangencial de um ponto na borda do cilindro obedece a relação $a = \alpha R$ sendo esta a aceleração com que o bloco desce o plano inclinado. Portanto, na expressão anterior temos:

$$TR = I\frac{a}{R} = \frac{1}{2}m_1R^2\frac{a}{R} \rightarrow \boxed{T = \tfrac{1}{2}m_1 a} \qquad (2)$$

A 2ª Lei de Newton aplicada ao movimento de translação do bloco resulta:

$$m_2 g\sin\theta - T = m_2 a \qquad (3)$$

Substituindo (2) em (3) temos:

$$m_2 g\sin\theta - \frac{1}{2}m_1 a = m_2 a \rightarrow \boxed{a = \frac{2m_2 g\sin\theta}{m_1+2m_2}}$$

(Q7) [1,0 ponto] A velocidade v com que m_2 chega ao plano horizontal ($h = 0$) é:

(a) $v = 2\sqrt{\frac{m_2gh}{m_1+2m_2}}$.

(b) $v = \sqrt{\frac{(m_1+2m_2)gh}{m_1+m_2}}$.

(c) $v = \sqrt{\frac{m_2gh}{m_1+m_2}}$.

(d) $v = 2\sqrt{\frac{m_1gh}{2m_1+m_2}}$.

(e) $v = \sqrt{\frac{2m_1gh}{m_1+2m_2}}$.

Solução Q7: Vamos obter a solução utilizando a conservação da energia mecânica do sistema uma vez que os movimentos do cilindro e do bloco ocorrem na ausência de forças de atrito. Toda a energia potencial do bloco será transformada em energia cinética de rotação do cilindro + energia cinética de translação do bloco, que terá energia potencial nula ao chegar em $h = 0$. Assim podemos escrever

$$m_2gh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 \qquad (4)$$

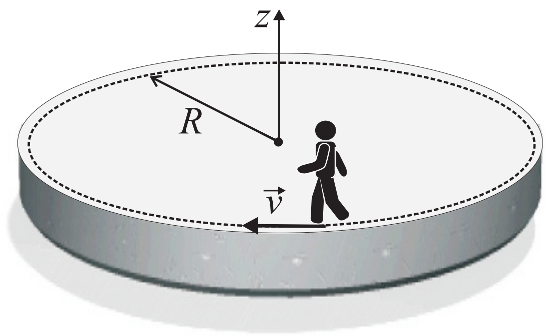
onde ω é a velocidade angular do cilindro e v a velocidade de translação do bloco no instante em que ele chega no plano ($h = 0$). Usando que $v = \omega R$ a expressão (4) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} m_2 g h &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}m_1 R^2)(\tfrac{v^2}{R^2}) + \tfrac{1}{2}m_2 v^2 \\ &= \tfrac{(m_1+2m_2)}{4}v^2 \end{aligned} \tag{5}$$

ou

$$\boxed{v = 2\sqrt{\tfrac{m_2 g h}{m_1+2m_2}}}$$

(Q8)[1,0 pontos] Uma pessoa de massa m está parada na borda de uma plataforma horizontal, de forma circular, com raio R e momento de inércia I que pode girar livremente em torno de um eixo vertical que passa pelo seu centro. Inicialmente, a plataforma está em repouso em relação ao solo. Num dado instante, a pessoa começa a andar ao longo da borda da plataforma, até atingir a velocidade de módulo v em relação ao solo, como mostra a figura. Neste instante, a velocidade angular da plataforma vale:



Considere a pessoa como uma partícula de massa m andando em um círculo de raio R sobre a plataforma.

(a) zero.
(d) $\vec{\omega} = -(mR^2/I)(v/R)\vec{k}$.
(e) $\vec{\omega} = +(mR^2/I)(v/R)\vec{k}$.
(b) $\vec{\omega} = -(v/R)\vec{k}$.
(c) $\vec{\omega} = +(v/R)\vec{k}$.

Solução Q8:
Inicialmente o sistema está parado e o momento angular do sistema (plataforma + pessoa) é nulo. Ao caminhar pela borda da plataforma, as forças internas serão tangenciais. Elas causam torque em cada um dos corpos do sistema (na plataforma e na pessoa), embora o torque resultante no sistema (plataforma + pessoa) seja nulo. Assim, para o movimento na borda da plataforma temos:

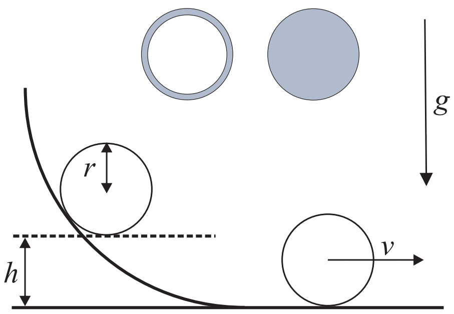
$$I_p\vec{\omega}_p + I\vec{\omega} = 0$$

onde I_p e $\vec{\omega}_p$ são o momento de inércia e o vetor velocidade angular da pessoa, e I e $\vec{\omega}$ são o momento de inércia e o vetor velocidade angular da plataforma. Tratando a pessoa como uma partícula movendo-se em um círculo de raio R sobre a plataforma podemos escrever:

$$mR^2(\frac{v}{R})(-\vec{k}) + I\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = (\frac{mR^2}{I})\frac{v}{R}\vec{k}}.$$

Portanto, a plataforma movimenta-se no sentido anti-horário com velocidade angular $\vec{\omega} = (\frac{mR^2}{I})\frac{v}{R}\vec{k}$. Para a prova em que a pessoa movimenta-se no sentido horário, a resposta correta é $\vec{\omega} = -(\frac{mR^2}{I})\frac{v}{R}\vec{k}$

(Q9)[2,0 pontos] Dois cilindros, de mesma massa M e raio externo r, sendo um oco com paredes finas e o outro sólido, rolam sem deslizar para baixo em uma superfície cilíndrica com formato circular, com raio R muito maior do que r, e que se conecta de forma contínua a um plano horizontal. Ambos partem do repouso, da mesma altura h em relação ao plano horizontal, no mesmo instante. Sobre o estado de movimento dos dois objetos, quando chegam ao plano horizontal, podemos afirmar que:



⋆ O momento de inércia de cada objeto, de massa M e raio r, em relação ao seu eixo de rotação que passa pelo seu centro de massa (CM) é:
Cilindro oco $\Rightarrow I_{CM} = Mr^2$
Cilindro sólido $\Rightarrow I_{CM} = \frac{1}{2}Mr^2$

(a) Ambos têm a mesma energia cinética de translação.
(b) Ambos têm a mesma energia cinética de rotação.
(c) Os dois objetos chegam juntos ao plano horizontal, pois partem do repouso da mesma altura h, com a mesma energia potencial gravitacional.
(d) O cilindro oco chega primeiro ao plano horizontal porque seu momento de inércia é maior que do cilindro sólido.
(e) O cilindro sólido chega primeiro ao plano horizontal porque seu momento de inércia é menor que do cilindro oco.

Solução Q9:
Uma vez que o movimento dos objetos é do tipo rolamento sem deslizamento, que ocorre sem dissipação de energia, usaremos a conservação da energia mecânica para resolver o problema. Ambos objetos têm a mesma energia mecânica inicial ($E_{inicial} = Mgh$) e, ao chegarem ao plano horizontal, esta energia será a mesma, apenas distribuída em quantidades diferentes entre as energias cinética de translação e cinética de rotação. A velocidade de translação de cada objeto ao chegar no plano horizontal ($h = 0$) é calculada como:

$$\Rightarrow \text{Energia mecânica inicial} : Mgh$$

$$\Rightarrow \text{Energia mecânica final} : \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

$$\Rightarrow \text{Rolamento sem deslizamento} : v_{CM} = \omega r$$

Usando a conservação da energia mecânica para cada um dos objetos temos:

$$\frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\frac{v_{CM}^2}{r^2} = Mgh \Rightarrow$$

$$v_{CM}^2 + v_{CM}^2(\frac{I_{CM}}{Mr^2}) = 2gh \Rightarrow \boxed{v_{CM}^2 = \frac{2gh}{(1+\frac{I_{CM}}{Mr^2})}}$$

Substituindo valores obtemos:

$$\text{Cilindro oco:} \quad \frac{I_{CM}}{Mr^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad v_{CM}^2 = gh$$

$$\text{Cilindro sólido :} \quad \frac{I_{CM}}{Mr^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad v_{CM}^2 = \frac{4gh}{3}$$

Assim, a chegar no plano inclinado, a velocidade do cilindro sólido será maior que do cilindro oco ($v_{CM}^{solido} > v_{CM}^{oco}$). Com base nestas informações, as alternativas podem ser analisadas. Portanto a resposta correta é que o cilindro sólido chega primeiro ao plano horizontal pois seu momento de inércia é menor quando comparado ao do cilindro oco.