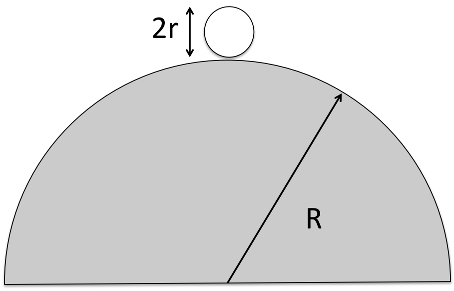
QUESTÕES DE MÚLTIPLA-ESCOLHA (1-4)

(1) [1,0] Uma bola de sinuca de raio r rola sem deslizar do topo de um domo esférico com raio R, onde $R > r$. Considere que a velocidade inicial da bola de sinuca de raio r é desprezível. Encontre o módulo da velocidade angular da bola de sinuca no momento em que ela perde contato com o domo.

- ☐ ***(a)*** $\omega = \sqrt{\frac{10}{17}\frac{g}{r^2}(R+r)}$
- ☐ ***(b)*** $\omega = \sqrt{\frac{10}{7}\frac{g}{r^2}(R+r)}$
- ☐ ***(c)*** $\omega = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{r^2}(R+r)}$
- ☐ ***(d)*** $\omega = \sqrt{\frac{10}{7}\frac{g}{r^2}(R)}$
- ☐ ***(e)*** $\omega = \sqrt{\frac{17}{10}\frac{g}{r^2}(R)}$



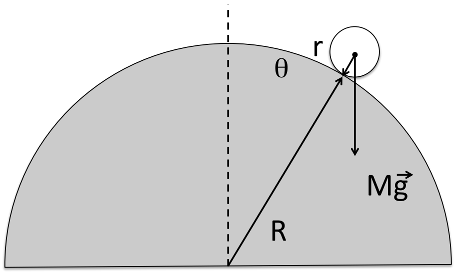
Solução:

Para que o centro de massa da esfera descreva uma trajetória circular acompanhando o domo, a aceleração centrípeta deve ser igual a

$$a_{cp} = \frac{v_{cm}^2}{(r+R)}.$$

Esta aceleração é causada pela combinação entre a força normal e a componente normal da força peso. À medida que a esfera vai rolando, a magnitude da força normal vai se reduzindo, e no limite da separação entre a esfera e o domo é igual a zero, e a única componente relevante é a contribuição normal da força peso: $Mg\,\cos(\theta)$. Portanto teremos

$$a_{cp} = \frac{v_{cm}^2}{(r+R)} = g\,\cos(\theta).$$



Já a velocidade do corpo pode ser determinada pela conservação de energia, posto que as forças atuantes ou são conservativas (peso), ou não realizam trabalho (normal, atrito em rolamento sem deslizamento). Portanto, igualando a variação de energia potencial com a variação de energia cinética

$$-\Delta U = Mg(R+r) - Mg(R+r)\cos(\theta) = \Delta K.$$

A energia cinética é composta por uma fração associada à translação do centro de massa, e outra à rotação por um eixo passando pelo centro de massa, portanto

$$\Delta K = \frac{M}{2}v_{cm}^2 + \frac{I_{cm}}{2}\omega^2 = \frac{Mr^2}{2}\left(1+\frac{2}{5}\right)\omega^2$$

onde usamos o fato que não há deslizamento (portanto $v_{cm} = \omega r$ e o momento de inércia da esfera dado pelo gabarito.

Da aceleração centrípeta temos

$$\cos(\theta) = \frac{\omega^2 r^2}{g(r+R)}.$$

portanto

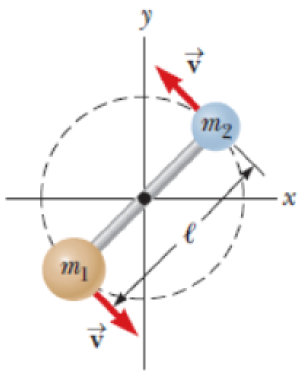
$$Mg(R+r) = Mg(R+r)\frac{\omega^2 r^2}{g(r+R)} + \Delta K = \frac{17}{10}M\omega^2 r^2.$$

Portanto:

$$\omega = \sqrt{\frac{10}{17}\frac{g}{r^2}(R+r)}$$

---

(2) **[1,0]** Duas partículas, com massas m_1 e m_2, estão ligadas por uma haste de massa desprezível e comprimento ℓ, conforme indicado na figura abaixo. Em um determinado instante de tempo t, o sistema começa a girar no plano Oxy em torno de um eixo de rotação que passa pelo centro da haste. Sabendo que o momento de inércia do sistema em relação ao eixo de rotação é I, quando o módulo da velocidade radial de cada partícula é v, o comprimento da haste é dado por:



- ☐ ***(a)*** $\ell = \sqrt{\frac{4I}{(m_1+m_2)}}$
- ☐ ***(b)*** $\ell = \sqrt{\frac{I}{(m1+m2)}}$
- ☐ ***(c)*** $\ell = \sqrt{\frac{4(m_1+m_2)}{I}}$
- ☐ ***(d)*** $\ell = \sqrt{\frac{4I}{3(m_1+m_2)}}$
- ☐ ***(e)*** $\ell = \sqrt{\frac{I}{4(m_1+m_2)}}$

Solução: Usando a definição de momento angular podemos escrever:

$$\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v}$$
$$\vec{L} = \frac{\ell}{2}m_1 v + \frac{\ell}{2}m_2 v = (m_1+m_2)v\frac{\ell}{2}\,\hat{k}$$

Porém, sabemos que:

$$\vec{L} = I\vec{w}$$
$$\vec{L} = I\frac{2v}{\ell}\,\hat{k}$$

Portanto,

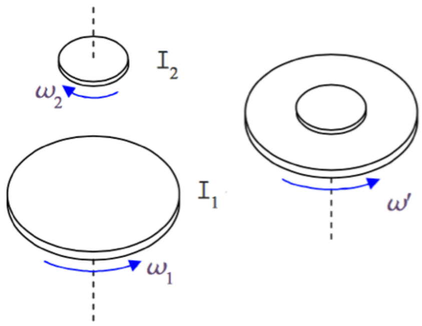
$$\frac{I2v}{\ell} = (m_1 + m_2)v\frac{\ell}{2}$$

$$\boxed{\ell = \sqrt{\frac{4I}{m_1 + m_2}}}$$

---

(3) **[1,0]** Um disco horizontal com momento de inércia I_1 em relação ao seu eixo de simetria, visto de cima, gira no sentido anti-horário com velocidade angular ω_1 (valor absoluto). Um segundo disco, com momento de inércia I_2 em relação ao seu eixo de simetria, visto de cima, gira no sentido horário com velocidade angular ω_2 (valor absoluto). Em um dado instante t, o segundo disco é colocado em cima do primeiro, e os dois discos passam a girar juntos com uma certa velocidade angular ω' em torno de um eixo de simetria comum. Nessa situação, a velocidade angular ω' é:

- ☐ ***(a)*** $\omega' = \frac{I_1\omega_1 - I_2\omega_2}{I_1 + I_2}$
- ☐ ***(b)*** $\omega' = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}$
- ☐ ***(c)*** $\omega' = \sqrt{\frac{I_1\omega_1 - I_2\omega_2}{I_1 + I_2}}$
- ☐ ***(d)*** $\omega' = \omega_1 + \omega_2$
- ☐ ***(e)*** $\omega' = \omega_1 - \omega_2$



Solução: Usando a conservação de momento angular temos que:

$$\vec{L_i} = \vec{L_f}$$
$$I_1 w_1 - I_2 w_2 = (I_1 + I_2)w'$$

Portanto,

$$\boxed{w' = \frac{I_1 w_1 - I_2 w_2}{I_1 + I_2}}$$

---

(4) **[1,0]** Uma criança empurra um carrossel, cujo deslocamento angular varia no tempo de acordo com a relação: $\theta = 0.5t + 0.04t^3$. Nessas condições, qual a velocidade angular média do carrossel no intervalo de t_i = 0 s até t_f =

5 s? Quantas voltas o carrossel dá no intervalo de t_i = 0 s até t_f = 5 s? (Aproxime $\pi \simeq 3$.)

- [ ] *(a)* 1,5 rad/s e 1,25 voltas
- [ ] *(b)* 1,75 rad/s e 1,8 voltas
- [ ] *(c)* 1,75 rad/s e 1,25 voltas
- [ ] *(d)* 1,5 rad/s e 1,8 voltas
- [ ] *(e)* 1,0 rad/s e 1,5 voltas

Solução:

$$\theta(t = 0\, s) = 0\, rad$$
$$\theta(t = 5\, s) = 0.5 \times 5 + 0.04 \times 5^3 = 7.5\, rad$$
$$\Delta\theta = 7.5 - 0 = 7.5\, rad$$

A velocidade angular média é dada por:

$$\Delta w = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{7.5}{5}$$
$$\boxed{\Delta w = 1.5\, rad/s}$$

Sabendo a velocidade angular média, o número de voltas é dado por:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{7.5}{6}$$
$$\boxed{N = 1.25\, voltas}$$

QUESTÕES DISCURSIVAS

ATENÇÃO: A solução dessas questões devem ser feitas no caderno de provas devidamente identificado com nome, NUSP e turma.

Todas as respostas devem ser justificadas e os cálculos devem estar descritos nas respostas.

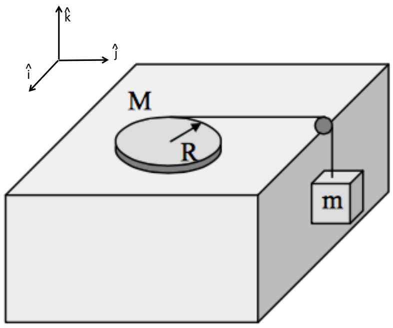
Q1(3 pts): Um disco de massa M e raio R está apoiado sobre uma superfície plana. Um fio inextensível, de massa desprezível, encontra-se enrolado ao redor do disco, preso a um eixo vertical. Um corpo de massa m é preso a uma das extremidades do fio, que passa por uma pequena polia de massa desprezível.

Supondo que o sistema é solto a partir do repouso, e que o disco gira sem atrito, determine:

[1,0] (a) A magnitude da força de tração

Solução:

1. (a) As forças que agem no bloco e no disco, respectivamente, são:



$$mg - T = ma$$
$$\tau = TR = I\alpha$$

Portanto,

$$TR = \frac{MR^2}{2}\alpha$$
$$\alpha = \frac{2T}{MR}$$

Porém, sabemos que:

$$a = \alpha R$$
$$mg - T = m\alpha R$$
$$mg - T = mR\frac{2T}{MR}$$
$$T\left(1 + \frac{2m}{M}\right) = mg$$
$$T = \frac{mMg}{M + 2m}$$

$$\boxed{T = \frac{mMg}{M + 2m}}$$

[0,75] (b) A magnitude, direção e sentido do momento angular do disco em relação ao seu centro em um instante de tempo t

Solução:

O momento angular varia com o tempo

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$
$$\frac{dL}{dt} = TR = \frac{mMgR}{M+2m}$$
$$L = \int_0^t \frac{mMgR}{M+2m} dt$$
$$L = \frac{mMgRt}{M+2m}$$
$$\boxed{\vec{L} = -\frac{mMgRt}{M+2m}\,\hat{k}}$$

[1,25] (c) Imagine agora que passado um intervalo de tempo Δt o fio perde contato com o disco. Após o fio perder contato, um weta (o maior inseto do mundo), com massa m_w, pousa exatamente no centro do disco. Se o inseto passa a se deslocar ao longo do raio do disco com velocidade constante v_w, qual é o módulo da velocidade angular do disco quando o inseto se encontra a uma distância r em relação ao centro do disco?

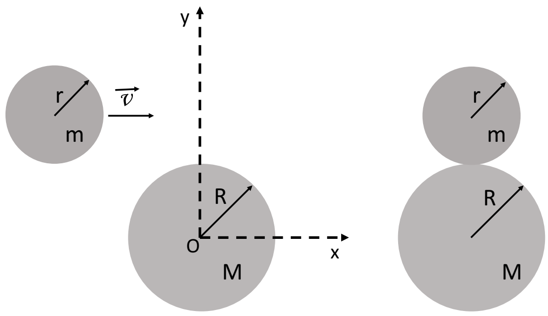
Solução:

Quando o fio perde contato com o disco não há mais força externa aplicada ao disco. Portanto, o torque externo é nulo.

$$\vec{L_i} = \vec{L_f}$$
$$|\vec{L_i}| = \frac{mMgRt}{M+2m}$$
$$|\vec{L_f}| = I_f w_f = \left(\frac{MR^2}{2} + m_w r^2\right) w_f$$
$$\frac{mMgRt}{M+2m} = \left(\frac{MR^2}{2} + m_w r^2\right) w_f$$
$$\boxed{w_f = \frac{mMgRt}{(M+2m)\left(\frac{MR^2}{2} + m_w r^2\right)}}$$

Lembre-se de fornecer as respostas como função das variáveis fornecidas no problema!

Q2(3 pts): Um disco de massa m = 40 g e raio r = 6 cm desliza ao longo de uma superfície sem atrito com velocidade $\vec{v}$ = 0,9 m/s $\hat{x}$. Em um dado instante de tempo t, ele colide com um outro disco de massa M = 120 g e raio R = 10 cm, inicialmente em repouso. A colisão acontece de tal maneira que apenas as bordas dos discos se tocam. Como as bordas dos discos estavam revestidas com uma cola de ação instantânea, os discos ficam grudados e passam a girar após a colisão. Nesse caso, determine os seguintes valores:



[0,5] (a) A velocidade do centro de massa do sistema.
Solução:
Não há forças externas, portanto a velocidade do centro de massa se conserva.

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m}{m+M}\vec{v} = \frac{40}{40+120} \times 0.9$$
$$\boxed{\vec{v}_{CM} = 0.22\ m/s\ \hat{x}}$$

[1,0] (b) A magnitude, direção e sentido do momento angular intrínseco dos discos, após a colisão, em relação ao seu centro de massa.
Solução:
Há conservação de momento angular em relação ao CM (não há torque externo):

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$

Cálculo da coordenada Y_{CM}:

$$Y_{CM} = \frac{M \times 0 + m(r+R)}{m+M} = \frac{40 \times (6+10)}{40+120} = 4.0\ cm$$
$$\vec{L}_i = \vec{r} \times \vec{p}_i = m\vec{r} \times \vec{v} = m(R + r - Y_{CM})\ \hat{y} \times v\ \hat{x}$$
$$\vec{L}_i = 40 \times 10^{-3} \times (10+6-4) \times 10^{-2} \times 0.9\ \hat{y} \times \hat{x}$$
$$\vec{L}_i = -4.32 \times 10^{-3}\ kg\ m^2/s\ \hat{k}$$

$$\boxed{\vec{L_f} = \vec{L_i} = -4.32 \times 10^{-3}\ kg\ m^2/s\ \hat{k}}$$

[1,5] (c) O valor absoluto da velocidade angular dos discos após a colisão, em relação ao seu centro de massa
Solução:
O momento de inércia do sistema em relação ao CM é dado por:

$$I = I_1 + I_2$$
$$I_1 = I_{CM_1} + m(R + r - Y_{CM})^2 = \frac{mr^2}{2} + m(R + r - Y_{CM})^2$$
$$I_1 = \frac{40 \times 10^{-3} \times (6 \times 10^{-2})^2}{2} + 40 \times 10^{-3} \times ((10 + 6 - 4) \times 10^{-2})^2$$
$$I_1 = 6.48 \times 10^{-4} kg\ m^2$$
$$I_2 = I_{CM_2} + MY_{CM}^2 = \frac{MR^2}{2} + MY_{CM}^2$$
$$I_2 = \frac{120 \times 10^{-3} \times (10 \times 10^{-2})^2}{2} + 120 \times 10^{-3} \times (4 \times 10^{-2})^2$$
$$I_2 = 7.92 \times 10^{-4} kg\ m^2$$
$$I = 1.44 \times 10^{-3} kg\ m^2$$

$$\vec{L_f} = I\vec{w}$$
$$|\vec{w}| = \frac{|\vec{L_f}|}{I}$$
$$|\vec{w}| = \frac{4.32}{1.44}$$
$$\boxed{|\vec{w}| = 3\ rad/s}$$

FORMULÁRIO

Momentos de inércia (eixo de simetria, passando pelo centro de massa):
Anel: $I_{CM} = MR^2$; Cilindro: $I_{CM} = \frac{MR^2}{2}$;
Esfera: $I_{CM} = \frac{2MR^2}{5}$; Haste: $I_{CM} = \frac{M\ell^2}{12}$;
Momento de Inércia: $I = \sum m_i r_i^2$; Teorema dos eixos paralelos: $I = I_{CM} + Md^2$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}\ ;\ \vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{L}_{int}$$