NUSP:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

Instruções: preencha ***completamente*** *os círculos com os dígitos do seu número USP (um em cada coluna); na parte de baixo dessa folha, preencha* ***completamente*** *os círculos com as respostas corretas correspondentes a cada questão. Use caneta esferográfica preta ou azul. Escreva apenas nas áreas designadas.*

Nome: ....

Assinatura: ....

Turma: ....

Professor: ....

ESTE ESPAÇO É DE USO EXCLUSIVO DA BANCA DE CORREÇÃO

	1a Avaliação	**Revisão**
Múltipla-escolha		
Parte discursiva		
Total		

- Esta prova é formada de uma parte objetiva contendo seis (6) questões de múltipla-escolha (Q1-Q6) e uma parte discursiva contendo uma (1) questão (Q7).
- A solução da questão discursiva deve ser feita no CADERNO DE RESPOSTAS devidamente identificado com nome, NUSP e turma.
- A parte objetiva corresponde a um total de 6,0 pontos e a parte discursiva a 4,0 pontos.

Marque as respostas das questões de múltipla-escolha

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(5) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(6) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

QUESTÕES DE MÚLTIPLA-ESCOLHA (1-6)

Quando necessário, use $\pi = 3,14$ e g=10 m/s^2

(1) [1,0 pt] Para um disco de massa M e raio R, que rola sem deslizar, o que é maior, sua energia cinética translacional ou sua energia cinética de rotação em relação ao centro de massa?

- ☐ *(a)* A energia cinética de rotação em relação ao centro de massa é maior.
- ☐ *(b)* A resposta depende da massa do disco.
- ☐ *(c)* As duas energias são iguais.
- ☐ *(d)* A resposta depende do raio do disco.
- ☐ *(e)* A energia cinética translacional é maior.

SOLUÇÃO:
Podemos usar as definições das energias cinéticas de translação e de rotação do disco:

$$K_t = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \quad \text{e} \quad K_r = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

Uma vez que $I_{CM} = \frac{1}{2} M R^2$ e o disco está rolando sem deslizar

$$|\vec{v}_{CM}| = |\vec{\omega}| R \Longrightarrow v_{CM}^2 = \omega^2 R^2$$

e obtemos

$$\frac{K_t}{K_r} = \frac{\frac{1}{2} M v_{CM}^2}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} M R^2)\omega^2} = 2$$

Resposta correta: alternativa **(e)**

(2) [1,0 pt] Um sistema formado por dois baldes e uma barra estão fixados a um eixo como indicado na figura. O sistema, que gira em torno do eixo com uma certa velocidade angular, descreve um círculo no plano perpendicular ao eixo. De repente começa a chover. Despreze qualquer tipo de atrito e força de resistência. Pode-se afirmar que:

- ☐ *(a)* Os baldes continuam girando com velocidade angular constante como conseqüência da conservação do momento angular do sistema baldes+barra+chuva.
- ☐ *(b)* Os baldes giram com maior velocidade angular porque o momento angular do sistema baldes+barra é conservado.
- ☐ *(c)* Os baldes continuam girando com velocidade angular constante porque o momento angular do sistema baldes+barra+chuva é conservado.
- ☐ *(d)* Os baldes giram com menor velocidade angular como conseqüência da conservação do momento angular e da energia mecânica do sistema baldes+barra+chuva.
- ☐ *(e)* Os baldes giram com menor velocidade angular porque o momento angular do sistema baldes+barra+chuva é conservado.

SOLUÇÃO:

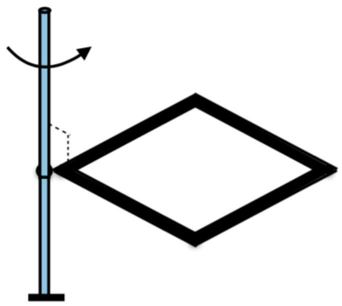
Não há torque resultante sobre o sistema "baldes+água+barra" com respeito ao ponto de apoio da barra, logo o momento angular com respeito a esse ponto é conservado

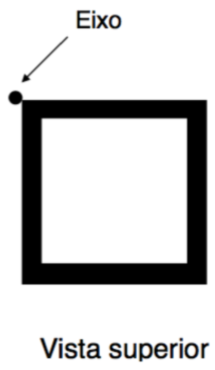
$$\vec{L} = I\vec{\omega} = I\omega_z\,\hat{k},$$

onde I é o momento de inércia do sistema com respeito ao eixo de rotação. Devido à chuva, a massa dos baldes aumenta, de forma que I aumenta e ω_z tem que diminuir para manter $\vec{L}$ constante. A energia mecânica do sistema não é conservada porque as colisões das gotas com os baldes são inelásticas.

Resposta correta: alternativa **(e)**

(3) [1,0 pt] Um objeto quadrado de massa m é formado de quatro varetas finas idênticas, todas de comprimento L e massa M, amarradas juntas. O objeto é fixado a uma barra, podendo girar em torno dela com velocidade angular $\vec{\omega}$, como mostrado na figura. O momento de inércia do objeto em relação ao eixo de rotação na figura é:





- ☐ *(a)* $7mL^2/12$.
- ☐ *(b)* $ML^2/12$.
- ☐ *(c)* $5mL^2/6$.
- ☐ *(d)* $ML^2/3$.
- ☐ *(e)* $mL^2/12$.

SOLUÇÃO:

Para cada barra o momento de inércia com respeito a um eixo passando pelo centro de massa é:

$$I^{(i)}_{CM_i} = \frac{1}{12}ML^2 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Usando o teorema dos eixos paralelos, com respeito ao centro de massa do sistema de barras, temos que o momento de inércia de cada barra é agora:

$$I^{(i)}_{CM} = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

O momento de inércia do quadrado com respeito ao eixo passando pelo seu CM e perpendicular ao plano do quadrado é então

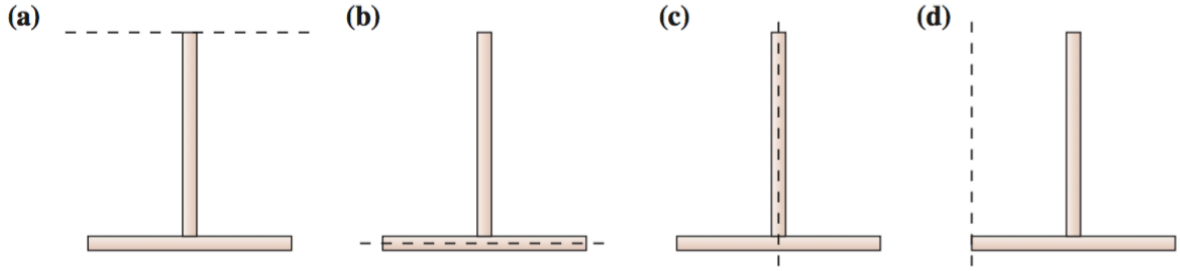
$$I_{CM} = \sum_{i=1}^{4} I^{(i)}_{CM} = \frac{4}{3}ML^2 = \frac{mL^2}{3} \quad (m = 4M)$$

Usando novamente o teorema dos eixos paralelos, o momento de inércia do quadrado com respeito ao eixo de rotação mostrado na figura é

$$I = I_{CM} + m\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{mL^2}{3} + \frac{mL^2}{2} = \frac{5}{6}mL^2$$

Resposta correta: alternativa **(c)**

(4) [1,0 pt] Duas barras idênticas de mesma massa e comprimento são usadas para desenhar um objeto com a forma da letra T. O objeto pode girar em torno dos eixos indicados pela linha tracejada na figura. Para os momentos de inércia I_a a I_d, relacionados com a rotação em torno ao eixo indicado, pode-se afirmar que:



- ☐ *(a)* $I_a > I_d > I_b > I_c$.
- ☐ *(b)* $I_a = I_d$ e $I_c = I_d$.
- ☐ *(c)* $I_a = I_c$ e $I_b = I_d$
- ☐ *(d)* $I_d > I_c > I_b > I_a$.
- ☐ *(e)* $I_a > I_b > I_c > I_d$

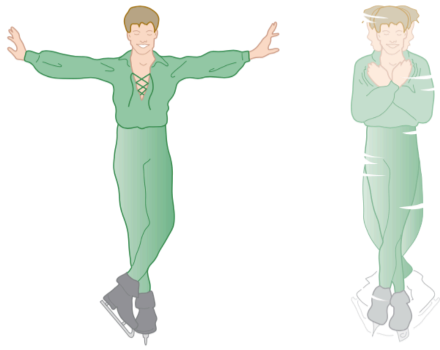
SOLUÇÃO:

O momento de inércia é menor quando a massa está concentrada mais próxima do eixo de rotação. Dessa forma

$$I_a > I_d > I_b > I_c$$

Resposta correta: alternativa **(a)**

(5) [1,0 pt] Durante uma exibição, Evgeni Plushenko, patinador artístico russo e três vezes campeão do mundo, está girando em torno de um eixo vertical com os braços estendidos horizontalmente. Em um certo instante, quando ele aproxima os dois braços do estômago, pode-se afirmar que:



- ☐ *(a)* O seu momento de inércia diminui, o seu momento angular permanece constante e sua energia mecânica aumenta.
- ☐ *(b)* O seu momento de inércia, momento angular e energia cinética diminuem.
- ☐ *(c)* O seu momento angular permanece constante e sua energia cinética diminui.
- ☐ *(d)* O seu momento de inércia aumenta, e seu momento angular e energia mecânica permanecem constantes.
- ☐ *(e)* O seu momento de inércia, momento angular e energia cinética aumentam.

SOLUÇÃO:
Uma vez que o torque total externo sobre o patinador é nulo, o momento angular com respeito a um ponto sobre o eixo de rotação, por exemplo, é constante

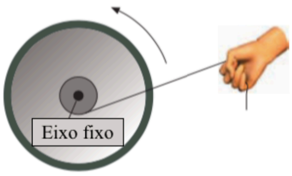
$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \vec{\text{cte}}$$

onde I é o momento de inércia com respeito ao eixo de rotação e $\vec{\omega}$ é a velocidade angular de rotação. Quando os seus braços são recolhidos, o momento de inércia do patinador diminui e, dessa forma, $|\vec{\omega}|$ tem que aumentar. A energia cinética de rotação do patinador é

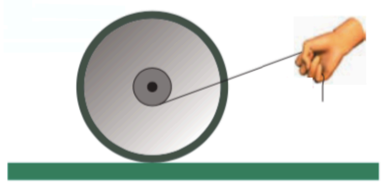
$$K = \frac{1}{2}I\vec{\omega}^2 = \frac{1}{2}I\left(\frac{\vec{L}}{I}\right)^2 = \frac{\vec{L}^2}{2I}$$

Dado que $\vec{L}^2$ é constante e I diminui, K aumenta. Nesse caso, a energia potencial gravitacional permanece a mesma, de forma que a energia mecânica aumenta.
Resposta correta: alternativa **(a)**

(6) [1,0 pt] Um carretel é livre para girar em torno de um eixo fixo, e um cordão enrolado em torno do seu eixo faz com que ele gire no sentido anti-horário como indicado na figura (a). No entanto, se o carretel é colocado sobre uma mesa horizontal [figura (b)], com o ângulo entre o fio e a horizontal igual ao da figura (a), e se há força de atrito suficiente entre ele e a mesa, podemos dizer que tal carretel:



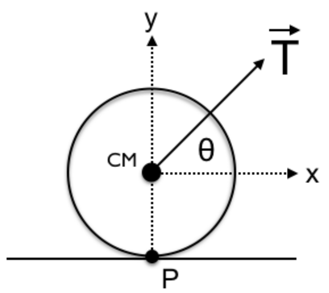
(a)


(b)

- ☐ *(a)* Gira no sentido horário e rola para a esquerda.
- ☐ *(b)* Gira no sentido anti-horário e rola para a esquerda.
- ☐ *(c)* Não rola.
- ☐ *(d)* Gira no sentido anti-horário e rola para a direita.
- ☐ *(e)* Gira no sentido horário e rola para a direita.

SOLUÇÃO:

Na situação em que o carretel está sobre a mesa, tomando como referência o ponto de contato entre o carretel e a mesa (P), a única força que pode produzir torque com respeito a esse ponto é aquela aplicada pelo fio no centro de massa (apesar do desenho mostrar que a força $\vec{T}$ está aplicada num ponto um pouco abaixo do CM, o resultado final, que depende dos sentidos do torque e da componente horizontal da tensão, continua o mesmo):



$$\vec{T} = |\vec{T}|\cos\theta\,\hat{\imath} + |\vec{T}|\sin\theta\,\hat{\jmath}$$

de forma que

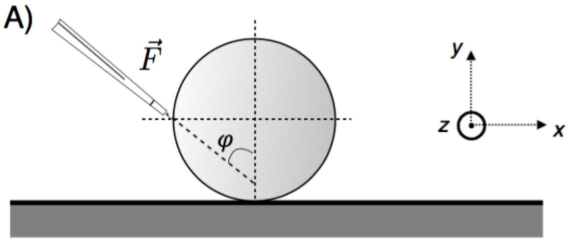
$$\vec{\tau}_{T_P} = R\,\hat{\jmath} \times \vec{T} = -R|\vec{T}|\cos\theta\,\hat{k}$$

Sendo assim, o torque causará uma rotação horária com respeito a um eixo passando por P e perpendicular ao plano da figura: o carretel rola para a direita e gira no sentido horário.

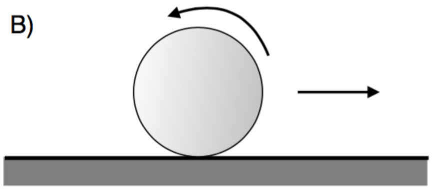
Resposta correta: alternativa **(e)**

QUESTÃO DISCURSIVA

(7) [4 pt] Durante uma competição de bilhar, Efren Manalang Reyes, um dos melhores jogadores de todos os tempos, atinge a bola com o seu taco como indicado na figura A ($\varphi > 45°$). O taco exerce uma força constante $\vec{F}$ (alinhada com o taco como mostra a figura A) durante um intervalo de tempo Δt, produzindo na bola um impulso linear de módulo J. A bola (massa M e raio R) ao ser atingida pelo taco não ricocheteia e move-se em linha reta para a



direita, girando como indicado na figura B até um instante t_D medido a partir do início do movimento. A partir desse instante de tempo, a bola começa a deslizar, sem girar, sobre a mesa até o instante t_R, a partir do qual começa a rolar sem deslizar. O coeficiente de atrito entre a bola e a mesa é μ.



(a) (1,0) Desenhe o diagrama de forças da bola durante o intervalo de tempo que dura a colisão entre o taco e a bola e escreva explicitamente as forças que agem sobre a bola no sistema de coordenadas da Figura A. Calcule os torques realizados pelas forças em relação ao centro de massa da bola.

(b) (1,0) Desprezando a força de atrito apenas durante o contato entre o taco e a bola, determine os vetores velocidade do centro de massa, $\vec{v}_0$, e velocidade angular de giro, $\vec{\omega}_0$, com os que a bola inicia o movimento.

(c) (1,0) Para um instante t posterior ao contato entre o taco e a bola, adote as condições iniciais calculadas no item (b) e determine os vetores velocidade do centro de massa e velocidade angular da bola como função do tempo t. Determine ainda o instante de tempo t_D.

(d) (1,0) Determine a velocidade do centro de massa da bola no instante em que a bola começa a rolar sem deslizar (instante t_R).

FORMULÁRIO

Momentos de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa:

- Barra delgada de massa M e comprimento L: $\frac{1}{12}ML^2$.
- Esfera de massa M e raio R: $\frac{2}{5}MR^2$.
- Disco de massa M e raio R: $\frac{1}{2}MR^2$.

CADERNO DE RESPOSTAS

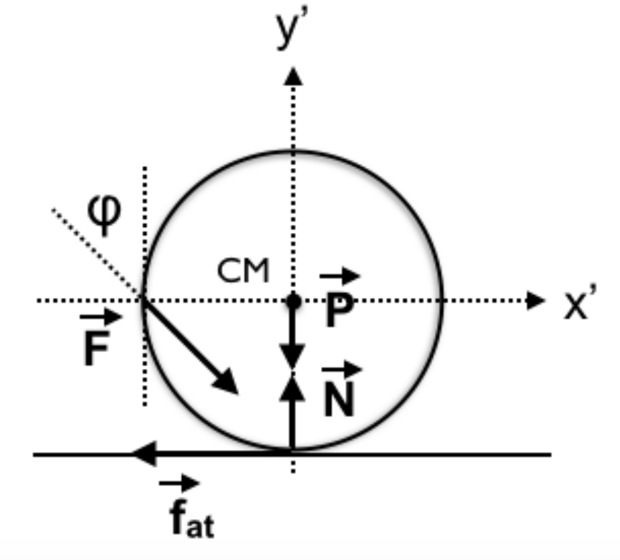
NOME:

NUSP:

TURMA:

GABARITO

(a) Diagrama de forças:



No sistema de coordenadas da figura, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= M\vec{g} = -Mg\,\hat{j}\\ \vec{N} &= |\vec{N}|\,\hat{j}\\ \vec{f_{at}} &= -|\vec{f_{at}}|\,\hat{i}\\ \vec{F} &= |\vec{F}|\sin\varphi\,\hat{i} - |\vec{F}|\cos\varphi\,\hat{j}\end{aligned}$$

Torques com respeito ao centro de massa da bola:

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_{\vec{P}} &= \vec{0} \quad \text{(o peso está aplicado direto no CM)}\\ \vec{\tau}_{\vec{N}} &= (-R\,\hat{j}) \times (|\vec{N}|\,\hat{j}) = \vec{0}\\ \vec{\tau}_{\vec{f_{at}}} &= (-R\,\hat{j}) \times (-|\vec{f_{at}}|\,\hat{i}) = -R|\vec{f_{at}}|\,\hat{k}\\ \vec{\tau}_{\vec{F}} &= (-R\,\hat{i}) \times (|\vec{F}|\sin\varphi\,\hat{i} - |\vec{F}|\cos\varphi\,\hat{j}) = R|\vec{F}|\cos\varphi\,\hat{k}\end{aligned}$$

(b) A variação de momento linear da bola é igual ao impulso transmitido pela força externa resultante que age na bola:

$$\Delta\vec{p}_{bola} = \vec{J}_{\text{ext.R}},$$

enquanto a taxa de variação no tempo do momento angular com respeito ao seu CM deve ser igual ao torque total com respeito a esse ponto:

$$\frac{d\vec{L}_{bola}}{dt} = \vec{\tau}_{CM}$$

Uma vez que todas as forças são constantes durante a duração Δt da colisão taco-bola e que podemos ignorar $\vec{f}_{at}$ nesse intervalo de tempo, é possível escrever:

$$\Delta\vec{p}_{bola} = \vec{J}_{\text{ext.R}} = (\vec{F} + \vec{N} + \vec{P})\Delta t$$

e

$$\Delta\vec{L}_{bola} = \vec{\tau}_{\vec{F}}\Delta t = I_{CM}\Delta\vec{\omega} \quad \text{(já que o peso e a normal não exercem torque)}$$

Da equação para a variação de momento linear acima e levando em conta que a bola parte do repouso

$$M\vec{v}_0 = \left[|\vec{F}|\sin\varphi\,\hat{\imath} + (|\vec{N}| - Mg - |\vec{F}|\cos\varphi)\,\hat{\jmath}\right]\Delta t$$

E como $\vec{v}_0 = v_0\,\hat{\imath}$ (não há ricochete), temos

$$|\vec{N}| - Mg - |\vec{F}|\cos\varphi = 0$$

e

$$Mv_0 = |\vec{F}|\Delta t\sin\varphi = |\vec{J}|\sin\varphi$$

A velocidade inicial da bola é então:

$$\vec{v}_0 = \frac{|\vec{J}|}{M}\sin\varphi\,\hat{\imath}$$

Da equação para a variação do momento angular, temos:

$$\vec{\tau}_{\vec{F}}\Delta t = R|\vec{F}|\cos\varphi\,\hat{k} \quad \text{e} \quad I_{CM}\Delta\vec{\omega} = \frac{2}{5}MR^2\vec{\omega}_0$$

de forma que

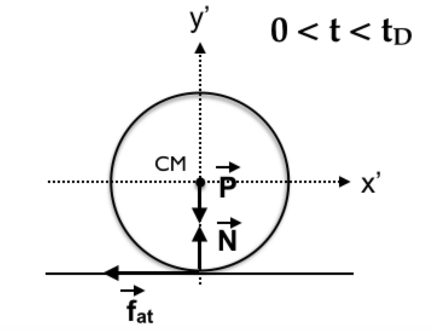
$$\vec{\omega}_0 = \frac{5}{2}\frac{|\vec{J}|}{MR}\cos\varphi\,\hat{k}$$

OBS: Logo após a tacada, a velocidade do ponto de contato P da bola com a mesa é dada por

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'_P = \vec{v}_0 + \vec{\omega}_0\times(-R\,\hat{\jmath}) = \frac{|\vec{J}|}{M}\left(\sin\varphi + \frac{5}{2}\cos\varphi\right)\hat{\imath}$$

onde $\vec{r}\,'_P$ é o vetor posição do ponto P em relação ao CM. Como $45^\circ < \varphi < 90^\circ$, $\vec{v}_P \neq \vec{0}$, de forma que a força de atrito é do tipo cinética.

(c) O movimento pode ser decomposto em translação do CM e rotação em torno do CM.



Logo após a tacada, o movimento do CM satisfaz a equação

$$\vec{f}_{at} + \vec{N} + \vec{P} = M\vec{a}_{CM} = a_{CM}\,\hat{\imath}$$

e a dinâmica da rotação em torno do CM é dada por

$$\vec{\tau}' = I_{CM}\vec{\alpha} = I_{CM}\alpha\,\hat{k} = \vec{\tau}_{fat}$$

Temos então

$$|\vec{N}| - Mg = 0 \Longrightarrow |\vec{N}| = Mg$$

de forma que a aceleração do CM é

$$a_{CM} = -\frac{|\vec{f}_{at}|}{M} = -\frac{\mu Mg}{M} = -\mu g$$

Da dinâmica de rotação

$$(-R\,\hat{\jmath}) \times (-|\vec{f}_{at}|\,\hat{\imath}) = \frac{2}{5}MR^2\alpha\,\hat{k} \Longrightarrow \alpha = -\frac{5}{2}\frac{|\vec{f}_{at}|}{MR} = -\frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}$$

Os respectivos vetores aceleração linear e aceleração angular são então

$$\begin{aligned} \vec{a}_{CM} &= -\mu g\,\hat{\imath} \\ \vec{\alpha} &= -\frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}\,\hat{k} \end{aligned}$$

Como ambos os vetores aceleração são constantes, os correspondentes vetores velocidade linear e angular num instante t anterior a t_D são simplesmente:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{CM}(t) &= \vec{v}_0 + \vec{a}_{CM}t = \left(\frac{|\vec{J}|}{M}\sin\varphi - \mu g t\right)\hat{\imath} \\ \vec{\omega}(t) &= \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha}t = \frac{5}{2R}\left(\frac{|\vec{J}|}{M}\cos\varphi - \mu g t\right)\hat{k} \end{aligned}$$

O instante t_D é aquele em que a bola para de girar, ou seja, $\vec{\omega}(t_D) = \vec{0}$, logo

$$t_D = \frac{|\vec{J}|}{\mu M g}\cos\varphi$$

OBS: Note que nesse instante

$$\vec{v}_{CM}(t_D) = \frac{|\vec{J}|}{M}(\sin\varphi - \cos\varphi)\,\hat{\imath}$$

e uma vez que $\sin\varphi > \cos\varphi$ ($45^\circ < \varphi < 90^\circ$), a bola segue se movendo para a direita.

(d) Quando a bola rola sem deslizar, a velocidade do ponto de contato é nula e consiste da soma vetorial da velocidade do centro de massa ($v_{CM}(t)$) com a velocidade tangencial associada ao movimento de rotação em torno do CM ($\vec{\omega} \times \vec{r}'_P$):

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_P = \vec{0} = v_{CM}(t)\,\hat{\imath} + \omega(t)\,\hat{k} \times (-R\,\hat{\jmath}) = [v_{CM}(t) + R\omega(t)]\;\hat{\imath} = \vec{0}$$

Logo

$$v_{CM}(t) = -R\omega(t)$$

Usando as soluções para $v_{CM}(t)$ e $\omega(t)$ do ítem anterior e a condição $v_{CM}(t) = -R\omega(t)$, temos

$$\frac{|\vec{J}|}{M}\sin\varphi - \mu g t_R = -\frac{5}{2}\left[\frac{|\vec{J}|}{M}\cos\varphi - \mu g t_R\right]$$

de forma que

$$t_R = \frac{2|\vec{J}|}{7\mu M g}\left(\sin\varphi + \frac{5}{2}\cos\varphi\right)$$

e a correspondente velocidade do centro de massa é

$$\vec{v}_{CM}(t_R) = \left(\frac{|\vec{J}|}{M}\sin\varphi - \mu g t_R\right)\hat{\imath} = \frac{5|\vec{J}|}{7M}(\sin\varphi - \cos\varphi)\,\hat{\imath}$$