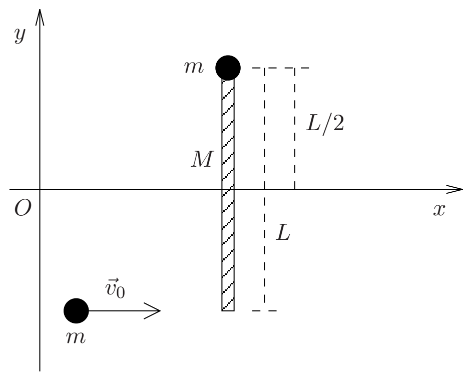
1) Uma barra delgada homogênea de comprimento L e massa M está inicialmente em repouso como mostra a figura. Preso a uma de suas extremidades há um objeto de massa m e dimensões desprezíveis. Um segundo objeto do mesmo tipo move-se na direção do eixo x, com velocidade $\vec{v}_0$ constante. No instante $t = 0$ o segundo objeto atinge a outra ponta da barra e adere a ela de forma permanente. Não há atrito no movimento dos objetos sobre o plano horizontal (x, y). Use para descrever o movimento da barra o ângulo θ entre a barra e o eixo y, considerando como positivo o sentido anti-horário.



a) [0,5 pt.] Determine o momento de inércia I_{CM} do conjunto de corpos, depois do choque, em relação a um eixo na direção $\hat{z}$, passando pelo centro de massa.

b) [0,5 pt.] Determine a velocidade $\vec{V}$ do centro de massa do conjunto de corpos, depois do choque.

c) [0,5 pt.] Determine a velocidade angular $\vec{\omega}$ do conjunto de corpos, depois do choque, em relação a um eixo na direção $\hat{z}$, passando pelo centro de massa.

d) [1,0 pt.] Determine a velocidade $\vec{v}(t)$ do segundo corpo, depois do choque, em relação à origem O do sistema de coordenadas mostrado na figura.

1. Dada a simetria do sistema, o centro de massa do conjunto de corpos está sobre o eixo x. O momento de inércia de cada corpo pontual em relação ao centro de massa é dado por

$$I_{1,2} = m\,\frac{L^2}{4}.$$

O momento de inércia da barra em relação ao centro de massa é dado por

$$\begin{aligned} I_B &= \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} d\ell\,\ell^2 \\ &= \frac{M}{L}\,\frac{\ell^3}{3}\Big[_{-L/2}^{L/2} \\ &= \frac{M}{L}\,\frac{2L^3}{24} \\ &= M\,\frac{L^2}{12}. \end{aligned}$$

Segue que o momento de inércia total em relação ao centro de massa é dado por

$$\begin{aligned} I_{CM} &= 2I_{1,2} + I_B \\ &= 2\,\frac{mL^2}{4} + \frac{ML^2}{12} \\ &= \left(\frac{m}{2} + \frac{M}{12}\right) L^2 \Rightarrow \\ I_{CM} &= \frac{6m + M}{12}\,L^2. \end{aligned}$$

2. Como não há forças externas, o momento linear do conjunto de corpos é conservado. O momento linear inicial é dado por

$$\begin{aligned} \vec{p}_i &= m\,\vec{v}_0 \\ &= mv_0\,\hat{x}. \end{aligned}$$

O momento linear final do conjunto de corpos é dado por

$$\begin{aligned}\vec{p}_f &= (2m+M)\,\vec{V} \\ &= (2m+M)V\,\hat{x}.\end{aligned}$$

Como $\vec{p}_f = \vec{p}_i$ temos que

$$\begin{aligned}(2m+M)V\,\hat{x} &= mv_0\,\hat{x} \Rightarrow \\ V &= \frac{mv_0}{2m+M} \Rightarrow \\ \vec{V} &= \frac{mv_0}{2m+M}\,\hat{x}.\end{aligned}$$

3. Como não há torques externos, o momento angular do conjunto de corpos em relação à origem O é conservado. O momento angular inicial é dado por

$$\vec{L}_i = mv_0\,\frac{L}{2}\,\hat{z}.$$

O momento angular final do conjunto de corpos é dado por

$$\begin{aligned}\vec{L}_f &= I_{CM}\,\vec{\omega} \\ &= \frac{6m+M}{12}\,L^2\omega\,\hat{z}.\end{aligned}$$

Como $\vec{L}_f = \vec{L}_i$ temos que

$$\begin{aligned}\omega &= mv_0\,\frac{L}{2}\,\frac{1}{L^2}\,\frac{12}{6m+M} \\ &= \frac{6m}{6m+M}\,\frac{v_0}{L} \Rightarrow \\ \vec{\omega} &= \frac{6m}{6m+M}\,\frac{v_0}{L}\,\hat{z}.\end{aligned}$$

4. A velocidade $\vec{v}$ de um ponto no corpo rígido é dada em termos da velocidade de translação do centro de massa $\vec{V}$ e da velocidade angular $\vec{\omega}$ de rotação em torno do centro de massa por

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

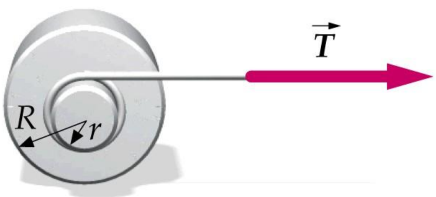
Em nosso caso aqui já temos os valores de $\vec{V}$ e $\vec{\omega}$, enquanto $\vec{r}$ é a posição do segundo corpo pontual em relação ao centro de massa, que é dada por

$$\vec{r} = \frac{L}{2}\,\left[\sin(\theta)\,\hat{x} - \cos(\theta)\,\hat{y}\right],$$

onde $\theta = \omega t$ e θ é o ângulo que a barra faz com o eixo y. Segue que temos para a velocidade do segundo corpo pontual

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{mv_0}{2m+M}\,\hat{x} + \frac{6m}{6m+M}\,\frac{v_0}{L}\,\frac{L}{2}\,\hat{z} \times \left[\sin(\omega t)\,\hat{x} - \cos(\omega t)\,\hat{y}\right] \\ &= \frac{mv_0}{2m+M}\,\hat{x} + \frac{3mv_0}{6m+M}\,\left[\sin(\omega t)\,\hat{z}\times\hat{x} - \cos(\omega t)\,\hat{z}\times\hat{y}\right] \Rightarrow \\ \vec{v}(t) &= \frac{mv_0}{2m+M}\,\hat{x} + \frac{3mv_0}{6m+M}\,\left[\cos(\omega t)\,\hat{x} + \sin(\omega t)\,\hat{y}\right].\end{aligned}$$

2) Um cilindro maciço de massa M e raio R é acelerado por uma força de tração T, conforme mostrada na figura, aplicada através de uma corda enrolada em torno de um tambor de raio r conectado concentricamente ao centro do cilindro. Despreze a massa da corda e do tambor e assuma o movimento na horizontal. O coeficiente de atrito estático é suficiente para que o cilindro role sem deslizar. Considerando que a aceleração do cilindro é a e que o momento de inércia é $I = MR^2/2$:

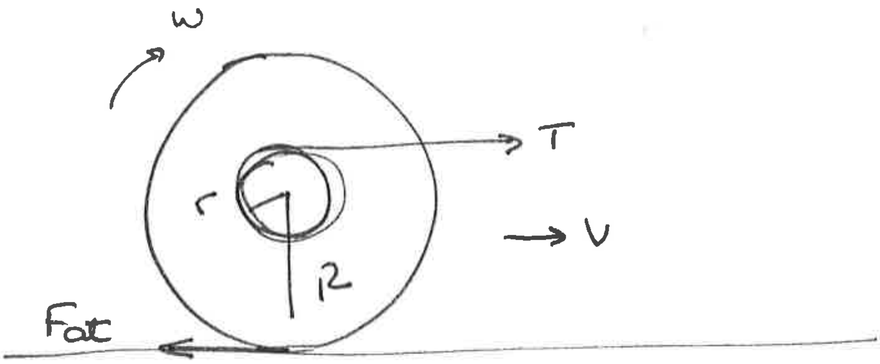


a) (1,0) Determine a força de atrito em função de M, a, r, R.

b) (1,5) Qual valor de r para que a aceleração do cilindro seja maior que T/M.

(2)

A roda de



sem deslizamento

$v = \omega r$

$a = \alpha R$

$\tau_{res} = I\alpha$

$F_{at} . R + T . r = I\alpha$

$F_{res} = T - F_{at} = M . a \Rightarrow T = F_{at} + Ma$

$$F_{at}R + (F_{at} + Ma) r = \frac{MR^2}{2} \frac{a}{R}$$

$$F_{at} + (F_{at} + Ma)\frac{r}{R} = \frac{Ma}{2}$$

$$F_{at}\left(1 + \frac{r}{R}\right) = \frac{Ma}{2} - \frac{Ma\,r}{R} = Ma\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{R}\right)$$

$$F_{at}\left(\frac{R+r}{R}\right) = Ma\left(\frac{R-2r}{2R}\right)$$

$$F_{at} = Ma \frac{\cancel{R}}{(R+r)} \frac{(R-2r)}{2\cancel{R}} \Rightarrow \boxed{F_{at} = \frac{Ma}{2}\left(\frac{R-2r}{R+r}\right)}$$

b) $T = F_{at} + Ma$

$$T = \frac{Ma}{2}\left(\frac{R-2r}{R+r}\right) + Ma$$

$$T = Ma\left(\frac{\frac{R}{2} - r}{R+r} + 1\right) = Ma\,\frac{\frac{R}{2} \cancel{-r} + R \cancel{+r}}{R+r}$$

$$T = Ma\,\frac{3}{2}\left(\frac{R}{R+r}\right)$$

$$\frac{T}{M} = a\,\frac{3}{2}\,\frac{R}{(R+r)} \Rightarrow a = \frac{2}{3}\left(\frac{R+r}{R}\right)\frac{T}{M}$$

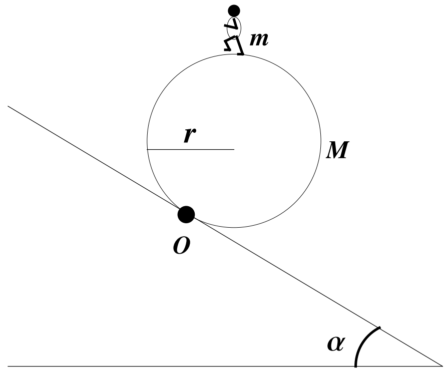
para que $a > \frac{T}{M}$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{R+r}{R}\right) > 1$$

$$2R + 2r > 3R$$

$$2r > R \Rightarrow \boxed{r > \frac{R}{2}}$$

3) Um cilindro oco (raio $r = 0.5m$, $M = 15kg$) rola para baixo em um plano inclinado (ângulo $\alpha = \pi/6$) sem deslizar. Sobre a superfície do cilindro corre um menino (massa $m = 30kg$, que pode ser considerada como puntiforme), e ele consegue ficar sempre no ponto mais alto do cilindro. Considere $g = 10\,m/s^2$.



a) [0,5 pt.] Calcule o momento de inércia do cilindro em relação ao eixo instantâneo (O).

b) [0,5 pt.] Ache a expressão para momento angular do sistema em torno do ponto O em termos das massas, ângulo, raio e velocidade do centro de massa.

c) [0,5 pt.] Qual é o torque total de forcas externas sobre o sistema em relação do ponto O?

d) [1,0 pt.] Calcule o modulo da aceleração do cento de massa do cilindro.

Respostas

a) Usando o teorema dos eixos paralelos: $I_O = I_{CM} + mr^2 = 2Mr^2 = 30kg * 0.25m^2 = 7.5kg/m^2$,

b) Para o cilindro usamos a expressão em termos de momento de inércia e velocidade angular, para menino a definição,

$L_O = I_O\omega + mvl$, (1),

onde l é distancia perpendicular do ponto O à linha da direção do vetor $\vec{v}$. O menino tem velocidade igual a do centro de massa em sistema referencial do plano inclinado.

Da geometria: $l = r(1 + \cos\alpha)$,

A velocidade angular é relacionada com velocidade de centro de massa (sem deslizar)

$\omega = v/r$,

Substituindo em (1):

$L_O = (2M + m(1 + \cos\alpha)rv$

c) Torque da força do peso:

$\tau_O = (M + m)gr\sin\alpha$

d) Centro de massa e eixo de rotação O se movem paralelo,

$(dL_O)/dt = \tau_O => (dL_O)/dt = (2M + m(1 + \cos\alpha)ra$

$a = (M + m)/(2M + m(1 + \cos\alpha)g\sin\alpha =$

$(2 * 45kg * 5m/s^2)/(2 * 30kg + 30kg(2 + \sqrt{3})) =$

$(90 * 5)/30(4 + \sqrt{3})(m/s^2) \cong 15/5.73(m/s^2) \cong 2.6(m/s^2)$

4) Um giroscópio de demonstração pode ser construído com uma roda de bicicleta com diâmetro de $0,6\,m$, enrolando-se um fio de chumbo. O eixo se projeta por um comprimento $d = 0.2m$ para cada lado da roda, e uma garota segura as extremidades do eixo em suas mãos. A massa do sistema roda + eixo é igual a $8\,kg$. Toda a sua massa pode ser considerada concentrada no fio de chumbo em sua periferia. O eixo é horizontal e a roda gira em torno do eixo com frequência $5,0\,rev/s$ (cinco voltas por segundo).

A garota começa a experimentar aplicando forças diferentes (verticalmente) com mãos opostas. Considere $g = 10\,m/s^2$.

a) [0,2 pt.] Ache o módulo e o sentido da força que cada mão exerce sobre o eixo quando o eixo está em repouso;

b) [0,5 pt.] Considerando agora que a mão direita aplica uma força menor do que a esquerda, faça um diagrama, desenhando vetores para mostrar forças dos mãos, do peso e velocidades angulares de rotação em torno do eixo e velocidade angular de precessão.

c) [1,0 pt.] Ache o módulo e o sentido da força que cada mão exerce sobre o eixo quando o eixo esta girando em um plano horizontal em torno do seu centro com uma taxa de $0.05 rev/s$.

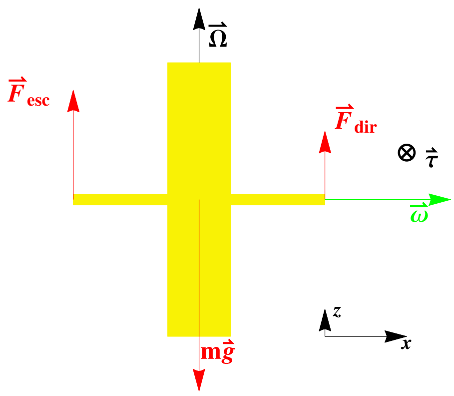
d) [0,8 pt.] Com que taxa o eixo deve girar de modo que ele possa ser suportado apenas em uma das suas extremidades.

Respostas.

a) Força resultante na direção vertical deve ser zero.

$$\begin{aligned}
\Omega &= 0 \Rightarrow \vec{\tau} = 0 \Rightarrow F_{dirz} = F_{escz} \\
F_{dirz} + F_{escz} &= mg, \\
F_{dirz} &= F_{escz} = \frac{mg}{2} \simeq 40N
\end{aligned}$$

b)



c)

$$\begin{aligned}
\Omega &= 0.05rev/s = 0.05rev2\pi rad/1rev/s = 0.1\pi rad/s, \\
\tau &= (F_{dirz} - F_{escz})d = \Omega I\omega, F_{dirz} + F_{escz} = mg \Rightarrow \\
F_{dirz} &= 0.5\left(mg - \Omega\frac{I\omega}{d}\right), F_{escz} = 0.5\left(mg + \Omega\frac{I\omega}{d}\right); \\
\frac{I\omega}{d} &= \frac{8kg(0.3m)^2(5rev/s2\pi rad/rev)}{0.2m} = \\
& 40 * 10^{-2} * 9 * 10 * \pi(kg * m/s) \\
&= 36\pi(kg * m/s), \\
F_{dirz} &= 0.5\left(80 - 0.1 * 36 * \pi^2\right) N \simeq 24N, \\
F_{escz} &= 0.5\left(80 + 0.1 * 36 * \pi^2\right) N \simeq 56N
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
F_{dirz} &= 0 = 0.5\left(mg - \Omega\frac{I\omega}{d}\right), \\
\Omega &= \frac{mgd}{I\omega} \simeq \frac{80N}{36\pi(kg * m/s)} \simeq 0.8rad/s = \\
&= 0.8rad \cdot rev/(2\pi rad)/s \simeq 0.13rev/s
\end{aligned}$$