FEP2195-Física Geral e Exp. para a Engenharia I - 3^a Prova - 16/06/2011

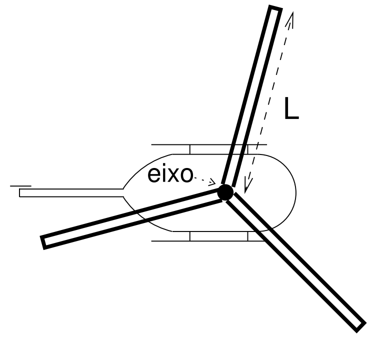
1. Considere o rotor de um helicóptero como sendo formado por três pás de comprimento L e massa M, unidas em suas extremidades (a largura e a espessura são desprezíveis em relação a L). O eixo do rotor é perpendicular ao plano das pás (vide figura).

(a) [0.75] Calcule o momento de inércia de cada pá em relação ao eixo do rotor e o momento de inércia total do rotor.

(b) [0,75] Se $M = 200$ kg e $L = 5$ m, calcule o torque τ necessário para que a velocidade angular do rotor varie uniformemente de zero a 300 rpm em 5 segundos.

(c) [0,5] Qual a potência média transferida ao rotor nesse intervalo de tempo?

(d) [0,5] Considere que o momento de inércia da cabine do helicóptero em relação ao eixo do rotor seja de $I_{\text{cab}} = 25000$ kg m^2. Se não houvessem forças externas atuando sobre o conjunto cabine+rotor, qual seria a velocidade angular da cabine ao final do intervalo de tempo do ítem (b)?



Solução:

(a) As pás podem ser consideradas como sendo hastes delgadas de comprimento L em massa uniforme M. Para cada uma das pás, o momento de inércia em relação ao eixo do rotor será :

$$I_p = \int_{\text{corpo}} r^2_{\text{eixo}} dm = \int_0^L x^2 \lambda dx = \frac{M}{L}\left(\frac{L^3}{3} - 0\right) = \frac{ML^2}{3}$$

(densidade $\lambda = M/L$, considerando a posição do eixo na coordenada $x = 0$).

Solução alternativa:

Para cada uma das pás, o momento de inércia pelo eixo perpendicular ao plano das pás que passa pelo centro de massa será:

$$I_{cm} = \int_{\text{corpo}} r^2_{\text{eixo}} dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda dx = \frac{M}{L}\left(\frac{(L/2)^3}{3} - \frac{(-L/2)^3}{3}\right) = \frac{ML^2}{12}$$

(densidade $\lambda = M/L$, considerando a posição do eixo na coordenada $x = 0$).

Para obter I em relação ao eixo do rotor, fazemos:

$$I_p = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}$$

O momento de inércia do rotor será $I = 3I_p = ML^2$.

(b) Para o rotor com aceleração angular α, temos $\tau = I\alpha$, onde $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$. Como $\Delta\omega = 300$ rpm, ou $\Delta\omega = 300.2\pi/60 = 10\pi$ rad/s e $\Delta t = 5s$, temos $\alpha = 2\pi$ rad/s^2.

Logo:

$$\tau = I\alpha = M.L^2.2\pi = 200.25.2\pi = 10000\pi \text{ N.m} \approx 31400 \text{ N.m}$$

(c) A variação de energia cinética será $\Delta K_c = \frac{1}{2}I\omega^2 - 0 = \frac{1}{2}.5000.(10\pi)^2 = 250000\pi^2$ J ou $250\pi^2$ kJ.

A potência média transferida será então

$$P_m = \frac{\Delta K_c}{\Delta t} = 250000\pi^2/5 = 50000\pi^2 \text{ W}$$

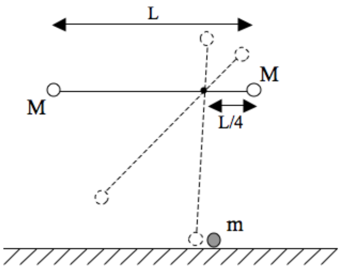
ou $P_m = 50\pi^2$ kW.

(d) Se não houverem torques externos atuando sobre o sistema cabine+rotor, o momento angular será conservado, logo $L_0^{\text{rotor}} + L_0^{\text{cab}} = L_f^{\text{rotor}} + L_f^{\text{cab}}$. No início do movimento, os momentos angulares da cabine e do rotor são zero, logo :

$$L_f^{\text{cab}} = -L_f^{\text{rotor}} \Rightarrow I_{\text{cab}}\omega_{\text{cab}} = -I\omega$$

Logo, $\omega_{\text{cab}} = -I\omega/I_{\text{cab}} = -5000.10\pi/25000 = -2\pi$ rad/s
ou 1 revolução por segundo no sentido contrário ao da rotação do rotor.

2. Um haltere composto por uma barra delgada de massa desprezível e comprimento L possui em cada extremidade um pequeno corpo de massa M de tamanho desprezível. O haltere é colocado para girar sem atrito em torno de um eixo horizontal perpendicular à barra, que passa por um ponto localizado a $1/4$ do seu comprimento. O haltere é abandonado no repouso na posição horizontal (ver desenho). Expresse suas respostas em função de M, L e da aceleração gravitacional g.



(a) (0,5) Calcule o momento de inércia I do haltere em relação àquele eixo de rotação.

(b) (1,0) Calcule a velocidade linear da extremidade mais comprida do haltere quando ela atinge a posição inferior.

(c) (1,0) Se, nesta posição inferior, o haltere colidir com um outro corpo de massa $m = 5M/3$ e tamanho também desprezível, inicialmente em repouso e que fica grudado no haltere, qual será a velocidade angular do conjunto logo depois da colisão?

a)

$$I_{haltere_{eixo}} = I_{corpo1_{eixo}} + I_{corpo2_{eixo}}$$

$$I_{corpo1_{eixo}} = M\left(\frac{3L}{4}\right)^2 = \frac{9ML^2}{16} \quad (kg\ m^2)$$

$$I_{corpo2_{eixo}} = M\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{ML^2}{16} \quad (kg\ m^2)$$

$$\rightarrow I_{haltere_{eixo}} = \frac{9ML^2}{16} + \frac{ML^2}{16} = \boxed{\frac{5ML^2}{8} \quad (kg\ m^2)}$$

b)

Como a única força que realiza um trabalho é a força peso que atua sobre o centro de massa do sistema e é conservativa, a energia mecânica total do sistema é conservada. Colocando o zero da energia potencial na altura inicial do sistema, temos que

$$E_{M_i} = E_{p_i} + E_{c_i} = 0\ J$$

$$E_{M_f} = E_{p_f} + E_{c_f} = M_{tot} g h_{CM} + \frac{1}{2} I \varpi^2 = -2Mg\frac{L}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{5ML^2}{8}\varpi^2 \quad (J)$$

$$E_{M_i} = E_{M_f} \rightarrow \varpi = \pm\sqrt{\frac{8g}{5L}} \quad (Rad/s)$$

$$v_{extremidade} = \varpi R = \sqrt{\frac{8g}{5L}} \times \frac{3L}{4} = \boxed{\sqrt{\frac{9gL}{10}} \quad (m/s)}$$

c)

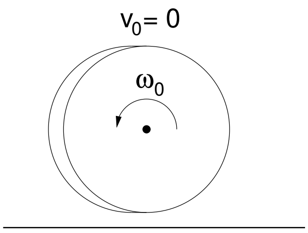
Na posição inferior, a linha de ação da força peso passa pelo eixo de rotação. Neste caso, a resultante dos torques externos é nula em torno daquele eixo, o que leva à conservação do momento angular.

$$L_i = I\varpi = \frac{5ML^2}{8} \times \sqrt{\frac{8g}{5L}} \quad (kg\ m^2/s)$$

$$L_f = I_f \varpi_f \qquad \text{onde} \quad I_f = I_{haltere_{eixo}} + md^2 = \frac{5ML^2}{8} + \frac{5M}{3}\left(\frac{3L}{4}\right)^2 = \frac{25ML^2}{16} \quad (kg\ m^2)$$

$$L_i = L_f \rightarrow \varpi_f = \boxed{\frac{4}{5}\sqrt{\frac{2g}{5L}} \quad (Rad/s)}$$

3. Um disco sólido uniforme é posto em rotação com velocidade angular ω_0 em torno de um eixo horizontal, perpendicular ao plano do disco, passando por seu centro de massa. Depois, a borda do disco é posta em contato com uma superfície horizontal, e o disco é solto, com seu eixo de rotação paralelo à superfície, como na figura ao lado. Seja R o raio do disco, M sua massa e $I = MR^2/2$ seu momento de inércia em torno do centro de massa, e seja μ o coeficiente de atrito cinético entre o disco e a superfície. Em termos de ω_0, R, M, μ e da aceleração da gravidade g:



   (a) (1,0) Qual é o tempo necessário para que o disco deixe de derrapar?
   (b) (0,5) Qual é a velocidade angular do disco no momento em que ele deixa de derrapar?
   (c) (0,5) Qual é a distância percorrida enquanto o disco está derrapando?
   (d) (0,5) Calcule a razão entre a energia cinética final e a energia cinética inicial do disco.

Respostas:

(a) Inicialmente, $v_{cm} = 0$. Enquanto o disco derrapa, v_{cm} aumenta e ω diminui, até que $v_{cm} = \omega R$, devido à existência da força de atrito. Durante a derrapagem, o atrito é cinético: $F_a = \mu N = \mu M g$. Escrevendo a segunda lei de Newton para os movimentos de rotação e do CM, temos:

$$\tau_{R,cm} = I_{cm}\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{\tau_a}{I_{cm}} = \frac{F_a R}{MR^2/2} = \frac{2\mu g}{R} \tag{1}$$

$$F_R = M a_{cm} \quad \rightarrow \quad a_{cm} = \frac{F_a}{M} = \mu g \tag{2}$$

Integrando, escrevemos $\omega(t)$ e $v_{cm}(t)$:

$$\omega(t) = \omega_0 - \alpha t = \omega_0 - \frac{2\mu g t}{R} \tag{3}$$

$$v_{cm}(t) = at = \mu g t \tag{4}$$

Impomos $v_{cm} = \omega R$ para achar t:

$$\mu g t = \left(\omega_0 - \frac{2\mu g t}{R}\right) R \quad \rightarrow \quad 3\mu g t = \omega_0 R \quad \rightarrow \quad t = \frac{\omega_0 R}{3\mu g} \tag{5}$$

(b) Substituímos t em $\omega(t)$:

$$\omega = \omega_0 - \frac{2\mu g}{R} . \frac{\omega_0 R}{3\mu g} = \frac{\omega_0}{3} \tag{6}$$

(c) A distância percorrida é obtida integrando $v(t)$:

$$d = \int v(t)\, dt = \frac{\mu g t^2}{2} \tag{7}$$

Substituindo t do item (a):

$$d = \frac{\mu g}{2} \left(\frac{\omega_0 R}{3\mu g}\right)^2 = \frac{\omega_0^2 R^2}{18\mu g} \tag{8}$$

(d) A energia cinética final é igual a:

$$K_f = \frac{I_{cm}\omega^2}{2} + \frac{M v_{cm}^2}{2} = \left(\frac{MR^2}{2} + MR^2\right)\frac{\omega^2}{2} = \frac{3MR^2}{2}\frac{\omega_0^2}{18} = \frac{MR^2\omega_0^2}{12} \tag{9}$$

Cálculo da razão:

$$\frac{K_f}{K_0} = \frac{MR^2\omega_0^2/12}{\frac{MR^2}{2}\frac{\omega_0^2}{2}} = \frac{1}{3} \tag{10}$$

4. Num experimento de momento angular mostrado na foto ao lado, um anel é colocado em contato com uma mesa giratória, de tal maneira que o eixo do anel coincida com o eixo de rotação da mesa (colisão angular inelástica). Antes do contato com o anel, a mesa girava com velocidade angular decrescente por causa do atrito com os rolamentos. Durante o experimento, a velocidade angular variou conforme ilustrado no gráfico.

   Assuma que:
   - o anel possui o mesmo momento de inércia I que o da mesa giratória em relação àquele eixo de rotação,
   - a força de atrito entre os rolamentos e a mesa giratória é constante durante todo o movimento.

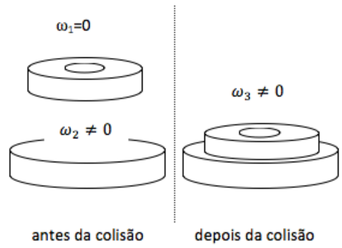


Figura 1. Diagrama do choque inelástico rotacional.

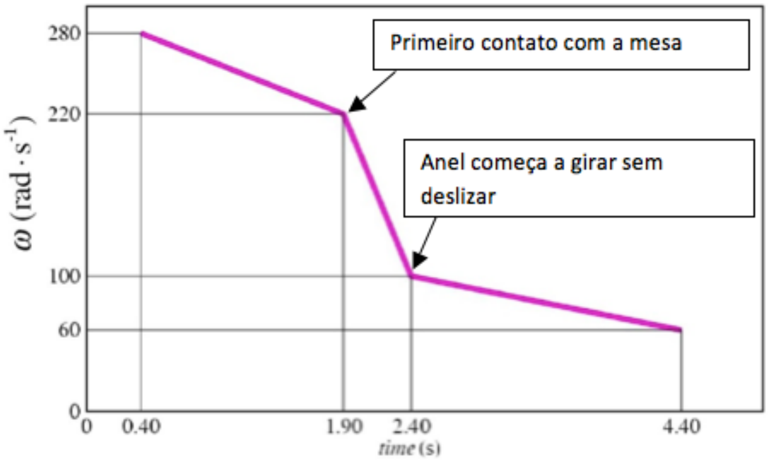


Figura 2. Velocidade angular da mesa giratória em função do tempo

   Expresse todas as suas respostas em função de I e dos dados do gráfico.

   (a) (0,5) Calcule o torque da força de atrito entre os rolamentos e a mesa giratória
   (b) (0,75) Calcule a energia cinética total do sistema anel-mesa logo antes da colisão (t=1,9 s) e logo depois que o anel e a mesa começam a girar com mesma velocidade angular (t=2,4 s).
   (c) (0,75) Calcule a energia dissipada pelo atrito entre a mesa e os rolamentos durante o intervalo de tempo de 1,9 s a 2,4 s
   (d) (0,5) Calcule a energia dissipada pelo atrito entre a mesa e o anel durante o intervalo de tempo de 1,9 s a 2,4 s

---

a) $\tau_{at} = -40I/s^2$
b) $K_i = 2,42.10^4 I/s^2$; $K_f = 10^4 I/s^2$
c) $W_A = -3200I/s^2$
d) $W = -1,1.10^4 I/s^2$