NUSP:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

Instruções: preencha ***completamente*** *os círculos com os dígitos do seu número USP (um em cada coluna); na parte de baixo dessa folha, preencha* ***completamente*** *os círculos com as respostas corretas correspondentes a cada questão. Use caneta esferográfica preta ou azul. Escreva apenas nas áreas designadas.*

Nome:..

Assinatura:....................................

Turma:..

Professor:.....................................

ESTE ESPAÇO É DE USO EXCLUSIVO DA BANCA DE CORREÇÃO

	1a Avaliação	Revisão
Múltipla-escolha		
Parte discursiva		
Total		

- Esta prova é formada de uma parte objetiva contendo seis (6) questões de múltipla-escolha (Q1-Q6) e uma parte discursiva contendo uma (1) questão (Q7).
- A parte objetiva corresponde a um total de 6,0 pontos e a parte discursiva a 4,0 pontos.

Marque as respostas das questões de múltipla-escolha

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

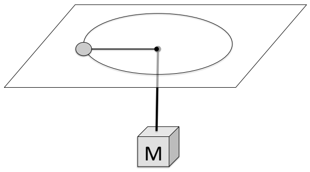
(5) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

(6) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ

QUESTÕES DE MÚLTIPLA-ESCOLHA (1-6)

Quando necessário, use $\pi = 3,14$, ln$(2) = 0,7$ e g=10 m/s^2

(1) (1,0) Um corpo de massa m desliza sobre uma superfície horizontal, preso a um fio que passa por um furo. A extremidade do fio está presa a uma massa M. O corpo de massa m gira sem atrito, fazendo uma trajetória circular de raio r_i, com velocidade angular suficiente para manter a massa M suspensa. Se a massa suspensa cair para a metade do seu valor inicial, qual a razão entre o raio final e o raio inicial?



- ☐ *(a)* $2^{1/2}$
- ☐ *(b)* 2^{-1}
- ☐ *(c)* 2^3
- ☐ *(d)* 2^2
- ☐ *(e)* $2^{1/3}$

SOLUÇÃO:

A força resultante sobre o corpo de massa m, em movimento circular, é a tensão na corda que, claramente, é do tipo central, ou seja, alinhada com o vetor posição da partícula com respeito a uma origem no centro da trajetória circular. Logo, essa força não pode exercer torque sobre a massa m, implicando que o sistema exibe conservação de momento angular:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \Longrightarrow \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_f \times \vec{p}_f \Longrightarrow m\omega_i r_i^2 \hat{z} = m\omega_f r_f^2 \hat{z}$$

tomando como eixo z aquele perpendicular à superfície horizontal e apontando de baixo para cima, de forma que

$$\left(\frac{r_f}{r_i}\right)^2 = \frac{\omega_i}{\omega_f} \tag{1}$$

Por outro lado, a tensão no fio sendo a resultante centrípeta e tendo intensidade igual ao peso do corpo suspenso, nos permite escrever:

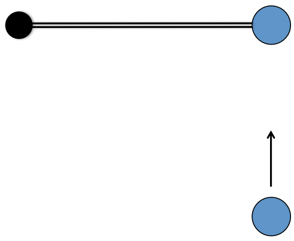
$$\left\{ \begin{array}{lcl} Mg & = & m\omega_i^2 r_i \\ \frac{M}{2} g & = & m\omega_f^2 r_f \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{\omega_i}{\omega_f} = \sqrt{2}\left(\frac{r_f}{r_i}\right)^{1/2} \tag{2}$$

Combinando as eqs (1) e (2), temos

$$\left(\frac{r_f}{r_i}\right)^2 = \sqrt{2}\left(\frac{r_f}{r_i}\right)^{1/2} \Longrightarrow \left(\frac{r_f}{r_i}\right)^4 = 2\left(\frac{r_f}{r_i}\right) \Longrightarrow \frac{r_f}{r_i} = 2^{1/3}$$

A alternativa correta é a **(e)**.

(2) (1,0) Temos dois discos sobre uma mesa, onde um fluxo de ar (na mesa) elimina o atrito no deslocamento horizontal. Um disco está preso por uma corda a um pivô fixo. O outro disco vem com uma velocidade inicial e colide com o primeiro. Após a colisão, os dois discos ficam colados. Sobre leis de conservação, podemos dizer que para o sistema (discos + corda):



- ☐ *(a)* A energia mecânica não se conserva, o momento linear não se conserva, o momento angular se conserva.
- ☐ *(b)* A energia mecânica não se conserva, o momento linear se conserva, o momento angular não se conserva.
- ☐ *(c)* A energia mecânica não se conserva, o momento linear se conserva, o momento angular se conserva.
- ☐ *(d)* A energia mecânica se conserva, o momento linear não se conserva, o momento angular se conserva.
- ☐ *(e)* A energia mecânica se conserva, o momento linear se conserva, o momento angular se conserva.

SOLUÇÃO:

Tomando como sistema aquele formado pelos 2 discos, como esses saem colados após a colisão, trata-se de colisão inelástica, de forma que não há conservação de enercia cinética e, por conseguinte, também de energia mecânica. Antes da colisão, a força resultante sobre o sistema é nula. Após a colisão, o sistema está sob a ação de uma força centrípeta aplicada pela corda. Tomando como origem do sistema de coordenadas, o centro da trajetória, essa força exerce torque nulo ($\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$) sobre o sistema, de forma que tanto antes quanto depois da colisão não há torque externo resultante sobre o sistema formado pelos dois discos. Nessa situação, o momento angular total do sistema de discos é uma constante do movimento e, portanto, conservado. Entretanto, a força centrípeta resultante após a colisão é responsãvel por uma aceleração centrípeta que a altera o vetor momento linear total do sistema de 2 discos:

$$\vec{P}_{tot} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

fazendo com que esse gire em torno do centro da trajetória circular. Portanto, não há conservação de momento linear. A alternativa correta é a **(a)**.

(3) (1,0) Um foguete de brinquedo pode ser feito com uma garrafa plástica parcialmente preenchida com água. Considere a massa da garrafa de 100 g e um volume de 100 ml de líquido, partindo na vertical. Ao ser liberada, o líquido é ejetado da garrafa rapidamente, e a mesma sobe até uma altura de 20 m. Qual é a velocidade aproximada de escape do líquido da garrafa?

- ☐ *(a)* 20 m/s
- ☐ *(b)* 50 m/s
- ☐ *(c)* 30 m/s
- ☐ *(d)* 10 m/s
- ☐ *(e)* 40 m/s

SOLUÇÃO:

A conservação de momento linear quando aplicada a uma garrafa **livre de forças externas** e expelindo líquido a uma velocidade v_e com respeito à garrafa, implica na seguinte relação entre as massas final M_f e inicial M_i do sistema (=garrafa+líquido interno) e as respectivas velocidades final v_f e inicial v_i

$$v_f - v_i = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

Dessa forma, na ausência do campo gravitacional uniforme nas proximidades da superfície terrestre, a velocidade final da garrafa, após expelir os 100 ml de água e tendo partido do repouso seria

$$v_f = v_e \ln\left(\frac{200\text{ g}}{100\text{ g}}\right) = v_e \ln(2)$$

Entretanto, na presença do campo gravitacional $\vec{g}$ é dito que a garrafa atinge a altura máxima de 20 m. Essa variação de energia cinética da garrafa observada entre os dois casos deve ser devida ao trabalho $-M_f gh$ realizado pelo campo gravitacional. De forma análoga, também pode-se dizer que a diferença está armazenada na forma de energia potencial gravitacional adquirida pela garrafa durante o percurso de subida. Podemos escrever então

$$-M_f gh = 0 - \frac{1}{2}M_f v_f^2 = -\frac{1}{2}M_f v_e^2(\ln(2))^2 \Longrightarrow v_e = \frac{\sqrt{2gh}}{\ln(2)} \simeq \frac{\sqrt{400}}{0,7} = \frac{20}{0,7} \simeq 28,6\text{ m/s}$$

Alternativa correta: **(c)**.

(4) **(1,0)** Você observa um carro a 40 km/h colidindo frontalmente com uma bola de tênis, lançada contra ele a 20 km/h. Você observa que a bola é rebatida pelo carro na mesma direção na qual ela incidiu. A velocidade final da bola observada por você será aproximadamente de

- ☐ *(a)* 60 km/h
- ☐ *(b)* 80 km/h
- ☐ *(c)* 20 km/h
- ☐ *(d)* 40 km/h
- ☐ *(e)* 100 km/h

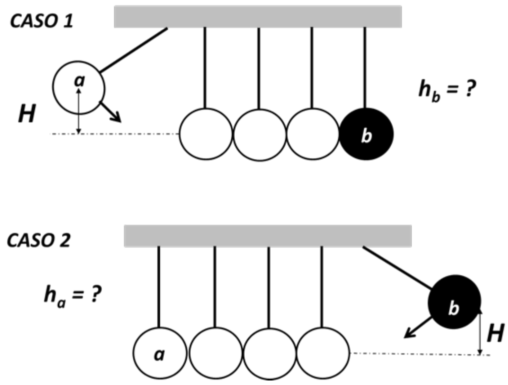
SOLUÇÃO:

Assumindo tratar-se de uma colisão elástica, conservação de momento linear e energia cinética implicam que as velocidades finais do carro (v_{1f}) e da bola (v_{2f}) podem ser escritas em termos das correspondentes velocidades iniciais v_{1i} e v_{2i} e das massa como:

$$\begin{aligned} v_{1f} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{2i} \stackrel{m_2 \ll m_1}{\longrightarrow} \simeq v_{1i} = 40\text{ km/h} \\ v_{2f} &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i} - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{2i} \stackrel{m_2 \ll m_1}{\longrightarrow} \simeq 2v_{1i} - v_{2i} = 2 \times 40 - (-20) = 100\text{ km/h} \end{aligned}$$

usando na última passagem as relações de grandeza entre as massas. Logo, a alternativa correta é a **(e)**.

(5) O pêndulo de Newton é um dispositivo formado por uma série de esferas suspensas em um único suporte por cordas de igual comprimento, que atuam como pêndulos idênticos adjacentes um ao outro, como ilustrado na figura abaixo. Podemos modificar esse dispositivo alterando a massa de uma das esferas (em preto) de m para M. Suponha os seguintes experimentos:



Caso 1: A esfera a de massa m é deslocada para esquerda e liberada, deslocando-se para direita e colidindo elasticamente com as demais esferas, inicialmente em repouso. Após a primeira colisão, a esfera b de massa M na extremidade oposta eleva-se de hb em relação ao plano dos pêndulos em repouso.

Caso 2: A esfera b de massa M é deslocada para direita e liberada, deslocando-se para esquerda e colidindo elasticamente com as demais esferas de massa m, inicialmente em repouso. Após a primeira colisão, a esfera a na extremidade oposta eleva-se de h_a em relação ao plano dos pêndulos em repouso.

Considerando M o triplo de m. A razão entre as alturas h_b e h_a nos casos 1 e 2 é:

☐ *(a)* 1/3

☐ *(b)* 3

☐ *(c)* 1/9

☐ *(d)* 1

☐ *(e)* 9

SOLUÇÃO:
Conservação de energia mecânica no Caso 1 implica:

$$mgH = 3mgh_b \quad \Longrightarrow \quad h_b = H/3$$

Conservação de energia mecânica no Caso 2 implica:

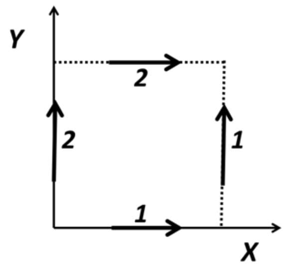
$$3mgH = mgh_a \quad \Longrightarrow \quad h_a = 3H$$

Logo

$$\frac{h_b}{h_a} = \frac{1}{9}$$

Alternativa correta: **(c)**

(6) Considerando o trabalho realizado por uma força $\vec{F} = x^2y^3\hat{\imath}$, entre a origem (0,0) e o ponto (1,1) ao longo dos caminhos:
(1) primeiro ao longo de x e depois ao longo de y,
(2) primeiro ao longo de y e depois ao longo de x,



Podemos afirmar:

- ▢ *(a)* $W1 = W2 = 0$
- ▢ *(b)* $W1 > 0$ e $W2 = 0$
- ▢ *(c)* $W1 < 0$ e $W2 = 0$
- ▢ *(d)* $W1 = 0$ e $W2 < 0$
- ▢ *(e)* W1 = 0 e W2 > 0

SOLUÇÃO:
O trabalho realizado por $\vec{F}$ ao longo do caminho 1 é nulo já que no trecho $(0,0) \to (1,0)$ a força é nula ($y = 0$) e no trecho $(1,0) \to (1,1)$ a força $\vec{F} = y^3\ \hat{\imath}$ é perpendicular ao caminho.

Já no trecho 2, temos que de $(0,0) \to (0,1)$ o trabalho é nulo, porque a força é nula ($x = 0$) e de $(0,1) \to (1,1)$ é positivo já que $\vec{F} = x^2\ \hat{\imath}$ e está na mesma direção e sentido que o deslocamento.

Alternativa correta: **(e)**.

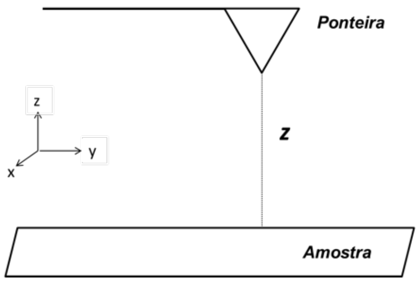
QUESTÃO DISCURSIVA

ATENÇÃO: A solução dessa questão deve ser feita no caderno de provas

Um aparato bastante utilizado em Nanotecnologia é o microscópio de força atômica, que permite medir a força de interação entre a superfície da ponteira e a superfície de uma amostra em escala nanométrica. Dentre os modelos usados para descrever essa interação está um variante do potencial Lennard-Jones, conhecido como potencial 9-6, cuja forma funcional é dada abaixo:

$$U(z) = A[(B/z)^9 - (B/z)^6]$$

onde z é a distância entre a ponteira e a amostra, A e B são parâmetros do potencial, com unidades de energia e distância, respectivamente, com A > 0 e B > 0.



(a) [0,5] Obtenha a expressão da força de interação entre a ponteira e a superfície em função de sua separação em termos dos parâmetros A e B.

(b) [0,5] Determine o valor da distância de equilíbrio entre a ponteira e a amostra.

(c) [0,5] Determine a energia de interação na condição de equilíbrio.

(d) [0,5] Identifique as regiões (faixas de valores de z) em que as interações são atrativas e/ou repulsivas e discuta sobre as condições de equilíbrio.

(e) [1,0]Determine as distâncias onde: i) essa força de interação é zero e ii) quando a força tem seu valor mínimo.

(f) [1,0] Partindo com a ponteira da posição de força mínima, qual é o trabalho realizado para afastarmos completamente a ponteira da amostra (isto é, leva-la a uma distância infinita)? (Este trabalho é conhecido como componente de capilaridade de adesão).

FORMULÁRIO

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

$$v(t_f) - v(t_i) = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

SOLUÇÃO:

(a) [0,5] Obtenha a expressão da força de interação entre a ponteira e a superfície em função de sua separação em termos dos parâmetros A e B.

A força, unidimensional nesse caso, depende apenas da coordenada z ao longo da linha que une a amostra à ponteira. Tomando como origem do eixo z a posição da superfície superior da amostra, podemos escrever:

$$F(z) = -\frac{dU}{dz} = -\frac{d}{dz}\left\{A[(B/z)^9 - (B/z)^6]\right\} = A\left[9\frac{B^9}{z^{10}} - 6\frac{B^6}{z^7}\right]$$

(b) [0,5] Determine o valor da distância de equilíbrio entre a ponteira e a amostra.

No sistema de coordenadas adotado, a distância de equilíbrio corresponde à posição $z = z_{eq}$ na qual a força entre a ponteira e a superfície da amostra se anula

$$F(z_{eq}) = A\left[9\frac{B^9}{z_{eq}^{10}} - 6\frac{B^6}{z_{eq}^7}\right] = 0 \quad\Longrightarrow\quad 9\frac{B^9}{z_{eq}^{10}} = 6\frac{B^6}{z_{eq}^7}$$

de forma que

$$z_{eq} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} B$$

(c) [0,5] Determine a energia de interação na condição de equilíbrio.

$$U(z_{eq}) = A\left[\left(\frac{B}{z_{eq}}\right)^9 - \left(\frac{B}{z_{eq}}\right)^6\right] = A\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] = A\frac{4}{9}\left[\frac{2}{3} - 1\right] = -\frac{4}{27}A < 0$$

(d) [0,5] Identifique as regiões (faixas de valores de z) em que as interações são atrativas e/ou repulsivas e discuta sobre as condições de equilíbrio.

Do ítem (a), vemos que $F(z > z_{eq}) < 0$ e $F(0 < z < z_{eq}) > 0$. Com o eixo z apontando da amostra para a ponteira, essas regiões correspondem então a forças atrativas e repulsivas, respectivamente.

Perceba também que

$$\lim_{z\to+\infty} U(z) = 0^- \quad \text{e} \quad \lim_{z\to 0^+} U(z) = +\infty$$

tendo a energia potencial um único ponto $z = z_{eq}$ em que a derivada se anula na região $0 \leq z < +\infty$. Logo, tal ponto de equilíbrio (determinado no ítem (b)) é de equilíbrio **ESTÁVEL**, já que só pode corresponder a um mínimo da energia potencial.

Outra forma de determinar a estabilidade de $z = z_{eq}$ é analisar o sinal da derivada segunda de $U(z)$ quando calculada no ponto de equilíbrio:

$$\left[\frac{d^2U}{dz^2}\right]_{z=z_{eq}} = \left\{\frac{d}{dz}\left[A\left(-9\frac{B^9}{z^{10}} + 6\frac{B^6}{z^7}\right)\right]\right\}_{z_{eq}} = A\left[90\frac{B^9}{z^{11}} - 42\frac{B^6}{z^8}\right]_{z_{eq}} = 18\left(\frac{2}{3}\right)^{8/3}\frac{A}{B^2} > 0 \text{ (mínimo)}$$

Veja um esboço da função energia potencial mais adiante.

(e) [1,0]Determine as distâncias onde: i) essa força de interação é zero e ii) quando a força tem seu valor mínimo.

i) a força é zero na posição de equilíbrio $z = z_{eq} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} B$

ii) os extremos de $F(z)$, que chamaremos $\{z_m\}$, satisfazem

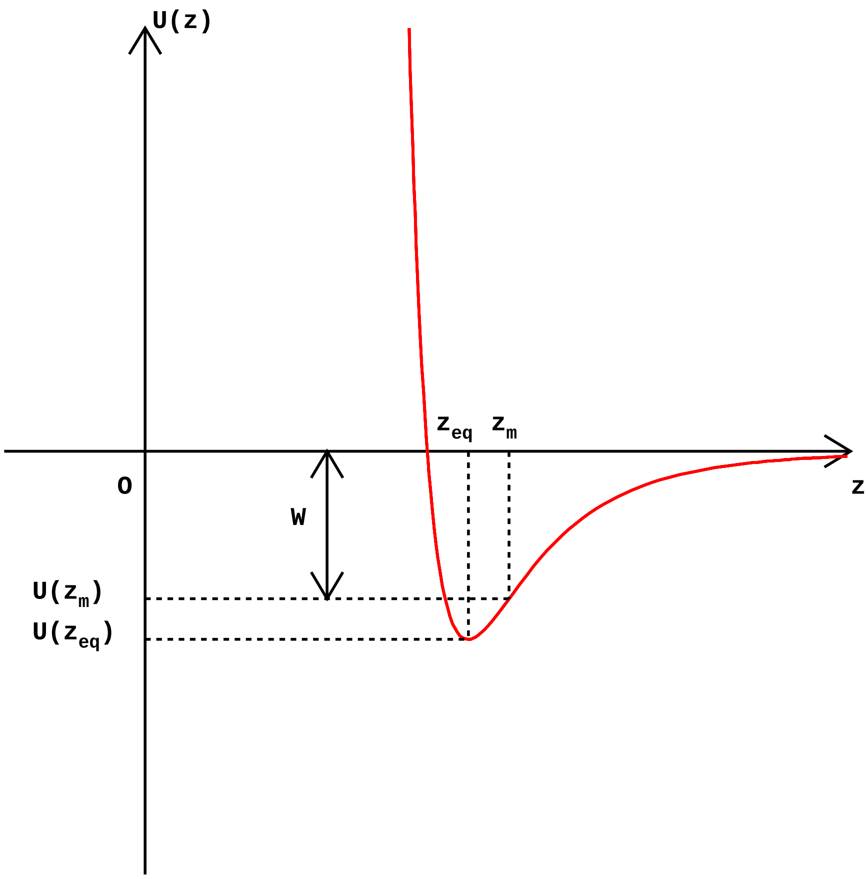
$$\left(\frac{dF}{dz}\right)_{z=z_m} = 0 = -A\left[90\frac{B^9}{z^{11}} - 42\frac{B^6}{z^8}\right]_{z=z_m} \implies 90\frac{B^9}{z_m^{11}} = 42\frac{B^6}{z_m^8}$$

Logo, há um único ponto de extremo

$$z_m = \left(\frac{15}{7}\right)^{1/3} B > z_{eq}$$

que deve corresponder a um mínimo de $F(z)$, já que analogamente a $U(z)$

$$\lim_{z\to+\infty} F(z) = 0^- \quad \text{e} \quad \lim_{z\to 0^+} F(z) = +\infty$$



(f) [1,0] Partindo com a ponteira da posição de força mínima, qual é o trabalho realizado para afastarmos completamente a ponteira da amostra (isto é, leva-la a uma distância infinita)? (Este trabalho é conhecido como componente de capilaridade de adesão).

Para afastar a ponteira a partir de $z = z_m$ até o infinito (a velocidade constante), precisamos exercer uma força $F_{ext} = -F(z)$, de modo que o trabalho total realizado nesse percurso é

$$
\begin{aligned}
W = \int_{z_m}^{\infty} F_{ext} dz = -\int_{z_m}^{\infty} F(z) dz = -A \int_{z_m}^{\infty} \left[9\frac{B^9}{z^{10}} - 6\frac{B^6}{z^7} \right] dz &= -9AB^9 \int_{z_m}^{\infty} z^{-10} dz + 6AB^6 \int_{z_m}^{\infty} z^{-7} dz \\
&= AB^9 z^{-9}\big|_{z_m}^{\infty} - AB^6 z^{-6}\big|_{z_m}^{\infty} \\
&= A \left[-\left(\frac{B}{z_m}\right)^9 + \left(\frac{B}{z_m}\right)^6 \right] \\
&= A \left[-\left(\frac{7}{15}\right)^3 + \left(\frac{7}{15}\right)^2 \right] \\
&= A \left(\frac{7}{15}\right)^2 \left[-\frac{7}{15} + 1 \right] \\
&= A \left(\frac{7}{15}\right)^2 \frac{8}{15} > 0
\end{aligned}
$$

Perceba que o trabalho anterior é igual a $-U(z_m)$.