## QUESTÕES DE MÚLTIPLA-ESCOLHA (1-5)

**Em toda a prova, quando necessário, use g=10 m/s$^2$. A menos de indicação explícita, o Sistema Internacional de unidades é utilizado.**

**(1) [1,0 pt]** Dois veículos espaciais em órbita estão acoplados e viajam a 3 km/s. A massa de um deles é de 1000 kg e a do outro 2000 kg. Para separá-los, é detonada entre os dois uma pequena carga explosiva que comunica uma energia cinética de 3000 J ao conjunto dos dois veículos, medida em relação ao centro de massa do sistema. A velocidade relativa de afastamento um do outro é:

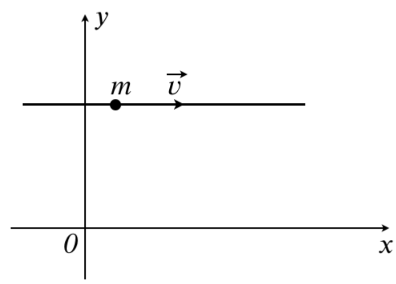
- ☐ *(a)* 3 km/s
- ☐ *(b)* 1 km/s
- ☐ *(c)* 3 m/s
- ☐ *(d)* 1 m/s
- ☐ *(e)* 2 m/s

**(2) [1,0 pt]** O gráfico da página **p3/8** mostra a velocidade de um foguete livre no espaço como função da razão $r = m_i/m$ entre a massa inicial $m_i$ do foguete e a sua massa $m$ num instante qualquer. Dentre as alternativas abaixo, qual a melhor estimativa para a velocidade dos gases de exaustão quando medida em relação ao próprio foguete?

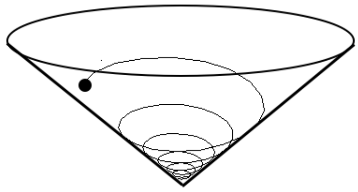
- ☐ *(a)* 80 m/s
- ☐ *(b)* 305 m/s
- ☐ *(c)* 550 m/s
- ☐ *(d)* 900 m/s
- ☐ *(e)* 1100 m/s

**(3) [1,0 pt]** A figura mostra a trajetória reta de uma partícula de massa $m$ no plano $xy$ com velocidade constante $\vec{v}$. É INCORRETO afirmar sobre o movimento que:

- ☐ *(a)* o momento angular em relação a qualquer ponto do plano é constante.
- ☐ *(b)* o momento angular em relação à origem é nulo.
- ☐ *(c)* o momento angular em relação ao ponto de interseção da trajetória com o eixo $y$ é nulo.
- ☐ *(d)* o torque total sobre a partícula é nulo.
- ☐ *(e)* a força resultante sobre a partícula é nula.

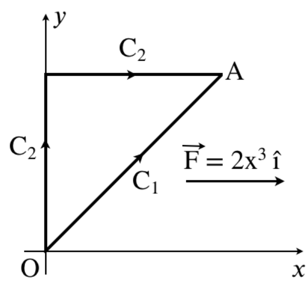


**(4) [1,0 pt]** A figura mostra uma bola de massa $m$ rolando sem deslizamento numa trajetória espiral descendente no interior de um cone oco e numa região de campo gravitacional uniforme $\vec{g}$. O trabalho realizado pela força de contato da parede sobre a bola é:

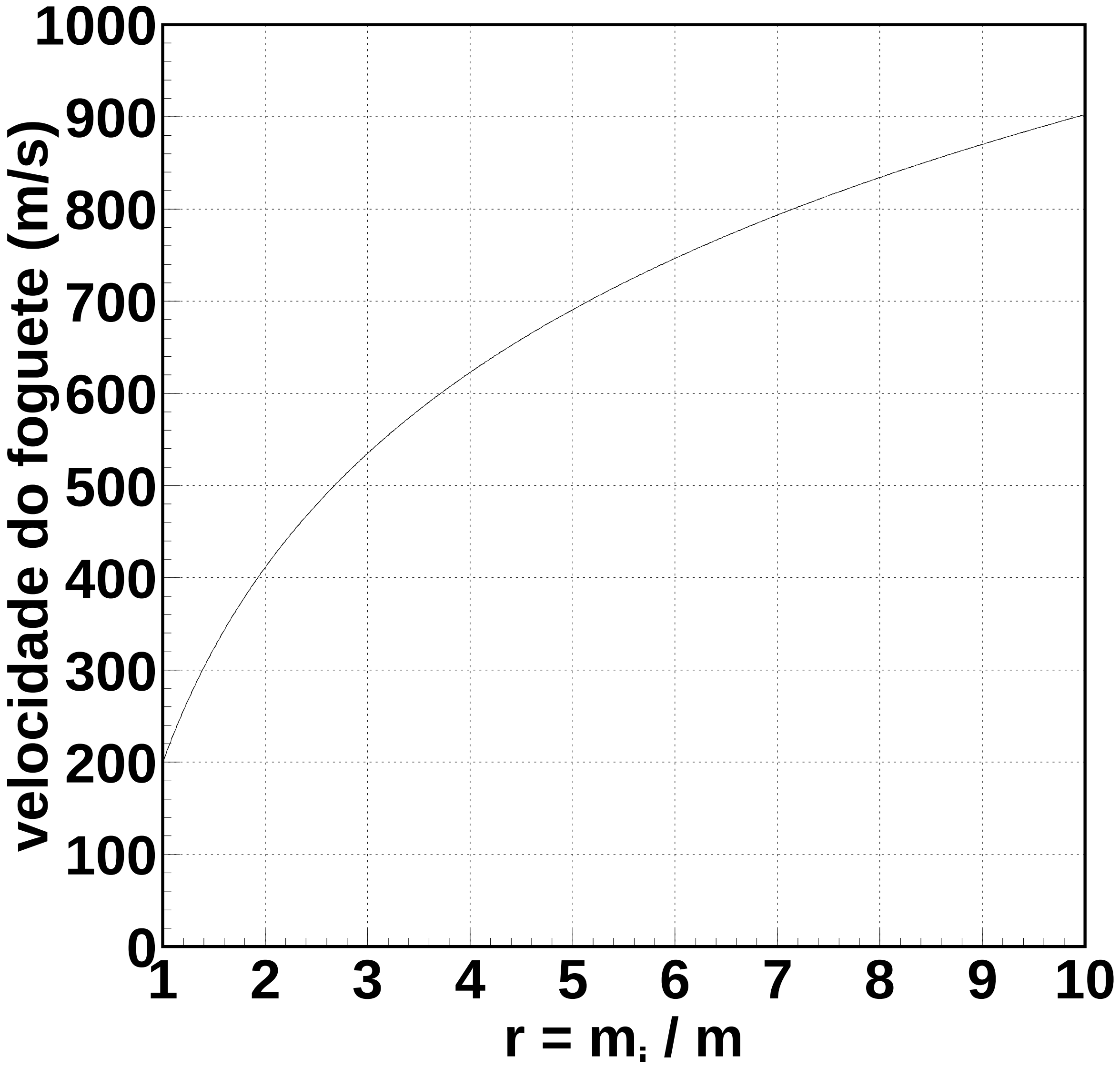


- (a) zero
- (b) depende da aceleração gravitacional local e da massa da bola.
- (c) depende da forma da trajetória espiral
- (d) positivo
- (e) negativo

**(5) [1,0 pt]** A figura mostra dois caminhos ($C_1$ e $C_2$) ao longo dos quais uma partícula é levada da origem O até o ponto A. Nessa região há uma força $\vec{F} = 2x^3\hat{\imath}$ (N), ~~onde $c$ é uma constante independente da posição~~. Pode-se dizer do trabalho realizado por $\vec{F}$:




- (a) que depende da massa da partícula.
- (b) que é maior ao longo do caminho $C_2$.
- (c) que ao longo de $C_1$ e $C_2$ são iguais numericamente à area do triângulo delimitado pelos 2 caminhos.
- (d) que é igual para os dois caminhos.
- (e) que é maior ao longo do caminho $C_1$.


velocidade do foguete (m/s)
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
r = m_i / m

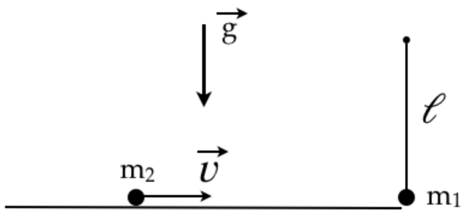
VERSÃO DE PROVA E GABARITO

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16A7: | (1) | C; | (2) | B; | (3) | B; | (4) | A; | (5) | D; |
| 3A33: | (1) | A; | (2) | D; | (3) | A; | (4) | D; | (5) | C; |
| E7Hx: | (1) | C; | (2) | B; | (3) | D; | (4) | D; | (5) | A; |
| 112F: | (1) | C; | (2) | D; | (3) | E; | (4) | E; | (5) | D; |

## QUESTÕES DISCURSIVAS

**ATENÇÃO: As soluções dessas questões devem ser feitas no caderno de respostas em anexo (folhas 1 e 2 e 3) devidamente identificado com nome, NUSP e turma.**

**(6) [2,5 pts]** Uma bola 1 de raio desprezível e massa $m_1 = 0,3$ kg encontra-se supensa na extremidade de um fio inextensível, de massa desprezível e comprimento $\ell = 0,1$ m. Ela é atingida por uma bola 2, também de raio desprezível, de massa $m_2 = 0,1$ kg que desloca-se com velocidade $v = 10$ m/s, sobre uma canaleta horizontal, cuja extremidade encontra-se na posição da bola 1, como ilustrado na figura. A colisão é elástica.




(a) (0,75) Determine os vetores velocidade das bolas imediatamente após a colisão.

(b) (0,5) Determine o vetor velocidade da bola 1 no topo da trajetória.

(c) (0,5) Calcule a tensão no fio quando a bola 1 está no topo da trajetória.

(d) (0,75) Calcule o vetor momento angular do sistema em relação ao ponto de suspensão da bola 1 antes e imediatamente após a colisão.

**(7) [2,5 pts]** Uma partícula de massa $m$ executa um movimento unidimensional e possui energia potencial cuja dependência com a coordenada $x$ é

$$U(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}$$

onde $a$ e $b$ são constantes positivas.

(a) (0,5) Encontre a expressão da força que atua sobre a partícula como função da posição;

(b) (0,5) Faça esboços das funções energia potencial e força como funções da posição da partícula.

(c) (1,0) Encontre a(s) posição(ões) de equilíbrio da partícula sob a ação dessa força e classifique-o(s) de acordo com a estabilidade;

(d) (0,25) Determine qual(ais) o(s) intervalo(s) de energia mecânica $E_{mec}$ para o(s) qual(is) uma partícula sujeita a essa força possui movimento numa região limitada da reta.

(e) (0,25) Determine qual(ais) o(s) intervalo(s) de energia mecânica $E_{mec}$ para o(s) qual(is) uma partícula sujeita a essa força pode ser encontrada a distâncias arbitrariamente grandes da origem.

## FORMULÁRIO

| | | |
|---|---|---|
| $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ | $\ln(2) \simeq 0,7$ | $\ln(3) \simeq 1,1$ |
| $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ | $\ln(5) \simeq 1,6$ | $\ln(7) \simeq 1,9$ |

**CADERNO DE RESPOSTAS - FOLHA 1**

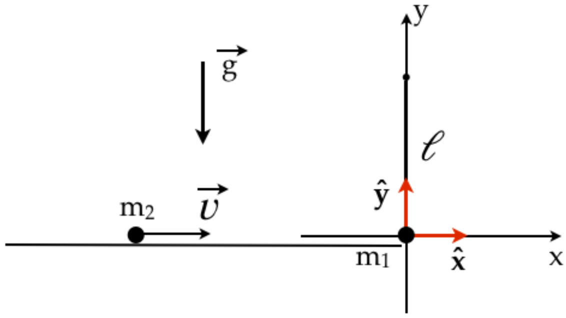
**NOME:**

**NUSP:**

**TURMA:**

**GABARITO Q6**

**a)** Como trata-se de colisão elástica, podemos aplicar conservação de momento ($\vec{p}_i = \vec{p}_f$) e energia cinética ($K_i = K_f$) para os instantes imediatamente antes e imediatamente após essa colisão (quando pode-se desprezar a variação de energia potencial da massa $m_1$). Tome $v_{1f}$, $v_{2f}$ como as velocidades paralelas à canaleta, imediatamente após a colisão.




Conservação de momento implica:

$$m_2 v = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

enquanto conservação de energia cinética:

$$\frac{1}{2} m_2 v^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

De modo que

$$v_{2f} = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right) v = -5 \text{ m/s} \quad ; \quad v_{1f} = \left(\frac{2m_2}{m_2 + m_1}\right) v = 5 \text{ m/s}$$

No sistema de referência cartesiano da figura acima (**atenção: o sistema de referência adotado por você, deve estar explícito no seu caderno de solução**) temos então:

$$v_{2f} = -5\hat{x} \text{ (m/s)} \quad ; \quad v_{1f} = 5\hat{x} \text{ (m/s)}$$

**b)** De acordo com o teorema do trabalho-energia cinética, o trabalho total realizado pelas forças atuantes sobre $m_1$ após a colisão ($\vec{P}$ e $\vec{T}$) deve ser igual à variação de energia cinética entre os pontos final e inicial do percurso em questão:

$$W_{tot} = W_P + W_T = \int_i^f m\vec{g} \cdot d\vec{r} + \int_i^f \vec{T} \cdot d\vec{r} = W_P = \int_i^f (-mg\hat{y}) \cdot d\vec{r} = -mg \int_{y_i}^{y_f} dy = -mgh$$

onde usou-se o fato de que a tensão $\vec{T}$ é sempre perpendicular ao vetor deslocamento infinitesimal $d\vec{r}$, e tomou-se pontos final e inicial separados por uma distância vertical $y_f - y_i = h$.

Caso toda a energia cinética fosse convertida em energia potencial, a altura máxima atingida seria $h_{max} = \frac{v^2}{8g} = 1,25$ m $> 2\ell$, de modo que a massa $m_1$ atinge a altura $h = 2\ell$ com velocidade

$$V = \frac{1}{2}\sqrt{v^2 = 16g\ell} = \sqrt{21} \text{ m/s}$$

de forma que no sistema de referência adotado aqui, tem-se

$$\vec{V} = -\sqrt{21}\hat{x} \text{ (m/s)}$$

**c)** A força resultante no topo da trajetória deve ser a força centrípeta responsável pela massa $m_1$ mover-se num círculo de raio $\ell$. Logo

$$\vec{T} + \vec{P} = \vec{F}_{cp} \Longrightarrow -T\hat{y} - mg\hat{y} = -m\left(\frac{V^2}{\ell}\right)\hat{y}$$

Logo

$$T = m_1\left(\frac{V^2}{\ell} - g\right) = 60\,\mathrm{N}$$

**d)** Imediatamente antes da colisão, podemos escrever o vetor momento angular como

$$\vec{L}_a = \vec{r}_a \times \vec{p}_a = (-\ell\hat{y}) \times (m_2 v\hat{x}) = m_2 v\ell\hat{z} = 0,1\hat{z}\ (\mathrm{kg\ m^2/s})$$

ou seja, no sistema de referência cartesiano de orientação positiva adotado, o vetor momento angular imediatamente antes da colisão aponta para fora do plano que contém a canaleta e o fio de suspesão.

Analogamente, podemos escrever para o instante imediatamente posterior à colisão,

$$\begin{aligned}
\vec{L}_d = \vec{L}_{1d} + \vec{L}_{2d} &= (-\ell\hat{y}) \times (m_1 v_{1f}\hat{x}) + (-\ell\hat{y}) \times (-m_2 v_{2f}\hat{x}) \\
&= m_1 v_{1f}\ell\hat{z} - m_2 v_{2f}\ell\hat{z} \\
&= \ell(m_1 v_{1f} - m_2 v_{2f})\hat{z} \\
&= 0,1\hat{z}\ (\mathrm{kg\ m^2/s})
\end{aligned}$$

O fato de que $\vec{L}_a = \vec{L}_d$ nesse caso não é uma simples coincidência, mas uma consequência direta da lei de conservação do momento angular em sistemas sobre os quais o torque resultante $\vec{\tau}_R$ é nulo. Aqui, as forças externas agindo sobre $m_2$ (peso e normal) se anulam, enquanto imediatamente após a colisão o mesmo vale para o peso e a tração sobre $m_1$. As forças atuando em ambas as massas durante o curto período de duração da colisão são forças internas e não podem, portanto, alterar o momento angular total do sistema.

CADERNO DE RESPOSTAS - FOLHA 2

NOME:

NUSP:

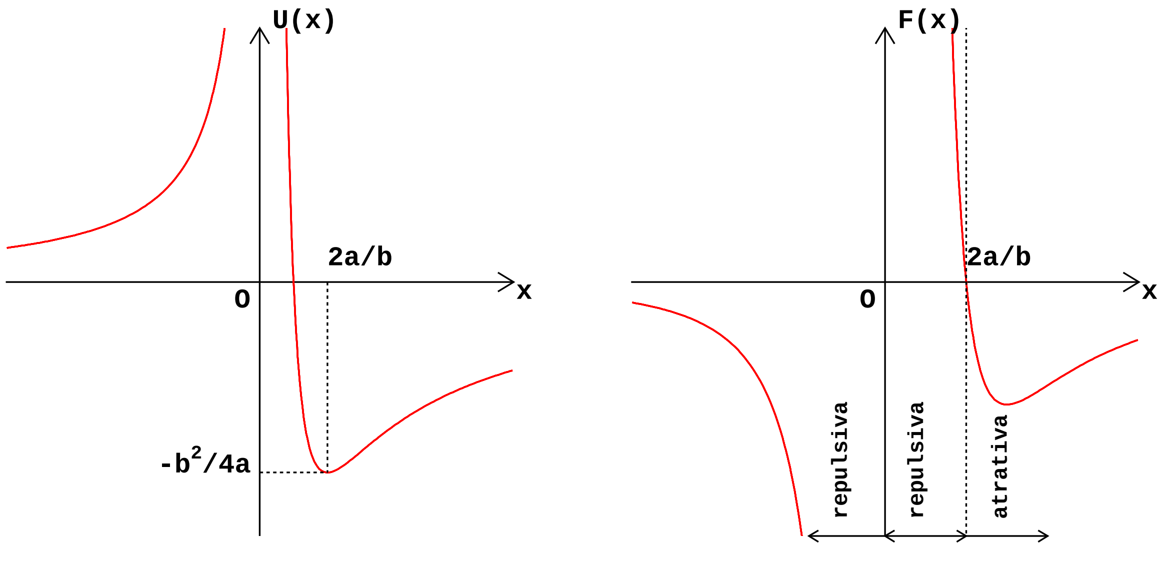
TURMA:

GABARITO Q7

**a)** A força é menos a derivada da energia potencial com respeito à posição $x$ $U(x)$, logo

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}\right) = \frac{2a}{x^3} - \frac{b}{x^2}$$

**b)** Esboços de $U(x)$ e $F(x)$




**c)** As posições de equilíbrio correspondem a pontos da reta em que a força $F(x)$ é nula, ou seja, nesse caso, há um único ponto que satisfaz essa condição:

$$F(x_{eq}) = \frac{2a}{x_{eq}^3} - \frac{b}{x_{eq}^2} = 0 \Longrightarrow x_{eq} = \frac{2a}{b}$$

A estabilidade de $x_{eq} = 2a/b$ pode ser determinada por meio do gráfico de $U(x)$ (trata-se de um ponto mínimo da energia potencial, logo é um ponto de equilíbrio estável). A estabilidade também pode ser determinada por meio do sinal da segunda derivada de $U(x)$ no ponto de equilíbrio:

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right]_{x=2a/b} = \left.\frac{6a}{x^4} - \frac{2b}{x^3}\right]_{x=2a/b} = \frac{b^4}{8a^3} > 0 \Longrightarrow \text{ponto de equilíbrio estável}$$

**d)** Para valores de energia mecânica total no intervalo

$$-b^2/4a \leq E_{mec} \leq 0$$

uma partícula posta na região $x > 0$ está confinada a mover-se entre os pontos $x = x_-$ e $x = x_+$ dados por:

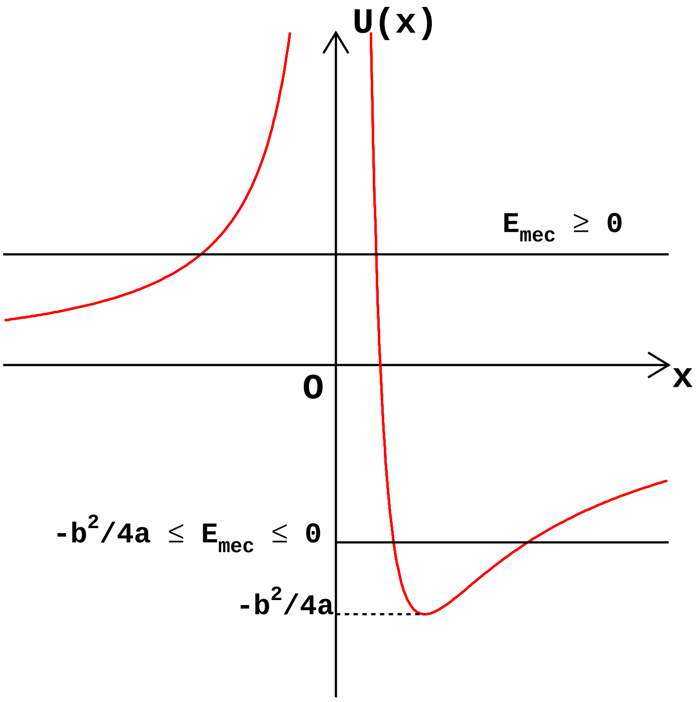
$$U(x_\pm) = E_{mec} \Longrightarrow \frac{a}{x_\pm^2} - \frac{b}{x_\pm} = E_{mec} \Longrightarrow x_\pm^2 + \left(\frac{b}{E_{mec}}\right) x_\pm - \left(\frac{a}{E_{mec}}\right) = 0$$

Logo

$$x_\pm = \frac{1}{2}\left[-\frac{b}{E_{mec}} \pm \sqrt{\frac{b^2}{E_{mec}^2} + \frac{4a}{E_{mec}}}\right]$$

**e)** Na região $x > 0$, no caso de energia mecânica positiva $E_{mec} \geq 0$, a partícula não pode ser encontrada a distâncias $d$ menores do que $|x_+|$, mas pode se afastar da origem por distâncias arbitrariamente grandes, movendo-se no sentido de x positivo.

Na região $x < 0$, a energia mecânica mínima é zero e a partícula não pode ser encontrada a distâncias $d$ menores do que $|x_-|$, mas pode se afastar da origem por distâncias arbitrariamente grandes, movendo-se no sentido de x negativo.



**CADERNO DE RESPOSTAS - FOLHA 3**

**NOME:**

**NUSP:**

**TURMA:**