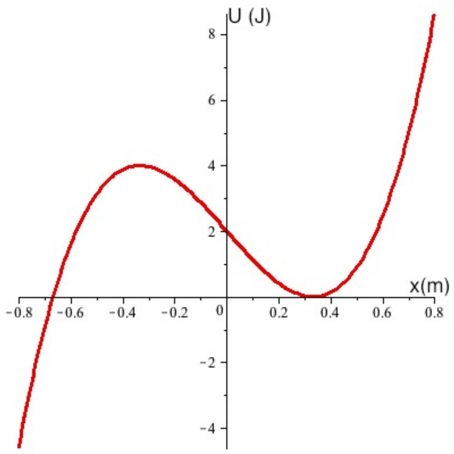
Física para a Engenharia I - 4323101 - 2^a Prova - 16/05/2014

---

1) Uma partícula de massa m pode se deslocar em uma dimensão, submetida a um potencial dado por

$$U(x) = 27x^3 - 9x + 2$$

em unidades do SI : U em Joules (J), e x em metros (m).



a) (0,5) Determine a expressão da força atuando sobre a partícula em função da posição x.

b) (0,5) Calcule as posições de equilíbrio da partícula.

c) (0,75) Determine as condições de equilíbrio em cada ponto, ou seja, se é estável, instável ou indiferente.

d) (0,75) Se uma partícula de massa m = 12 kg for deixada na condição de equilíbrio estável com velocidade de 1 m/s, ela realiza um movimento periódico? Justifique.

Resposta Q1:

a) Derivando a função temos:

$F = -\frac{dU}{dx} = -81x^2 + 9$

b) Fazendo $F = -\frac{dU}{dx} = 0$, temos duas soluções para x: $x_1 = -1/3\,m$ e $x_2 = 1/3\,m$.

c) A condição de equilíbrio é dada pela derivada segunda:

$\frac{d^2U}{dx^2} = 162\,x$.

Em x_1, $\frac{d^2U}{dx^2} = -54 < 0$, portanto a posição é de equilíbrio instável.

Em x_2, $\frac{d^2U}{dx^2} = 54 > 0$, portanto a posição é de equilíbrio estável.

d) A resposta é não.

Note que $U(x_2) = 0$, portanto toda a energia da partícula nesta caso é cinética, valendo $E = 12\,J$.

À direita, a energia potencial cresce monotonicamente, confinando o deslocamento da partícula. Já à esquerda, a energia potencial é limitada pelo máximo, obtido na posição de equilíbrio instável. Neste caso, $U(x_1) = 4\,J < E$. A partícula portanto está livre para se deslocar à esquerda, e o movimento não é periódico.

2) Um bate-estaca usa um motor de potência P = 15 kW para levantar um martelo de massa m = 1.500 kg até uma altura h = 20 m (relativa ao topo da estaca). Ao final do levantamento, a mesma é solta e bate sobre a haste sendo fixada no solo.

a) (0,5) Qual o tempo de subida do martelo?

b) (0,5) Qual a velocidade do martelo no momento de impacto?

c) (0,5) Qual o impulso que o martelo transmite em um ciclo (entre o início da subida e o final do impacto)?

d) (1,0) Se dobramos a potência do motor, e mantemos o mesmo tempo de subida, qual solução dará mais impulso ao martelo: dobrar a massa, ou dobrar a altura? Demonstre.

Dado g= 10 m/s^2.

Resposta Q2

a) A energia final do martelo no topo da coluna será $U = mgh = 300\,kJ$. Sendo que o motor fornece energia à uma taxa fixa P, o tempo de subida será dado por

$t_s = mgh/P = 20\,s$

b) A velocidade final do martelo será dada pela energia potencial, convertida em cinética:

$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m}} = 20\,m/s$

c) O impulso é dado pelo momento transferido à estaca $J = mv = 30.10^3 kg\,m/s.$

d) Dobrar a massa será mais eficiente para aumentar o impulso.

Para manter o tempo de subida, temos que o aumento de potência deve ser compensado por um aumento da massa ou da altura.

Como o impulso é dado por $J = m\sqrt{2gh}$, manter a altura implica em manter a velocidade final, e neste caso dobrando a massa dobramos o impulso.

Já se dobrarmos a altura o aumento do impulso será de apenas $\sqrt{2}$, inferior ao caso anterior.

3) Considere uma esteira muito longa que se move com uma velocidade constante de 1m/s (um motor mantém essa velocidade). Jogamos sobre essa esteira caixas de 200 g a uma taxa de 1 caixa por segundo. Cada caixa inicialmente escorrega sobre a esteira mas devido ao atrito cinético, cujo coeficiente é $\mu = 0,5$, as caixas terminam por se mover com a mesma velocidade da esteira. Considere que as caixas caem verticalmente sobre a esteira.

a) (0.5) Qual o valor da energia cinética fornecida para cada caixa ?

b) (0.5) Qual o módulo da força de atrito?

c) (1.0) Que energia é fornecida pelo motor ao sistema, para cada caixa que cai?

d) (0.5) Conforme as caixas vão caindo sobre a esteira, qual deve ser força que o motor deve exercer sobre a esteira de maneira a mantê-la a uma velocidade constante?

Resposta Q3:

a) A energia cinética fornecida à caixa:

$K_i = 0 \; K_f = \frac{1}{2} m_c v^2 = \frac{1}{2} * 0,2\,kg * (1\,m/s)^2 = 0,1J$

b) Solução 1) Podemos calcular que a variação de energia cinética da caixa dada pelo item (a) mais a energia dissipada pela força de atrito corresponde à energia fornecida pelo motor.

Para calcular a energia dissipada pela força de atrito, consideramos que a distância na qual a força de atrito atua ($\Delta x'$).

Podemos usar, por exemplo, a equação de Torricelli

$v_f^2 - v_i^2 = 2 * a * \Delta x'$

o que implica em $\Delta x' = 0,1\,m$

O trabalho em questão:

$W_{F_{at}} = F_{at} * \Delta x' = 1\,N * 0,1m = 0,1\,J,$

Somado ao resultado do item (a), nos dá, portanto,

$W_{motor} = K_f + W_{F_{at}} = 0,2\,J$

A força de atrito é dada por

$F_{at} = \mu * F_N = \mu * g * m = 0,5 * 10\,m/s^2 * 0,2\,kg = 1N$

Solução 2) A energia fornecida pelo motor é igual à força que o motor tem que aplicar à esteira (equilibrando a força de atrito), multiplicada pelo deslocamento da esteira enquanto a caixa é acelerada

Tempo de aceleração da caixa: $\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \Delta v \frac{m}{F_{at}} = 0,2\,s$.

Deslocamento da esteira: $\Delta x = v * \Delta t = 0,2\,m$.

Trabalho realizado pelo motor: $W = \int F\,dx = F_{at} * \Delta t = 0,2J$

d) Solução 1) temos que a relação entre força e momento, no problema e massa variável, resulta em:

$F_{ext} = \frac{dP}{dt} = \frac{dm}{dt} * v + m * \frac{dv}{dt}$

No caso da esteira, o sistema está em velocidade constante $v = 1\,m/s$ $(a = \frac{dv}{dt} = 0)$. Temos portanto apenas a variação de massa, a uma taxa $\frac{dm}{dt} = 0,2\,kg/s$

Portanto: $F_{ext} = 0,2\,(kg/s) * 1m/s = 0,2N$

para a força média exercida pela esteira.

Solução 2) A caixa é acelerada durante um intervalo de $0,2\,s$, pela força de atrito $F_{at} = 1\,N$. Esta força é aplicada em ciclos de 1 s (intervalo de tempo entre as quedas das caixas).

Temos então que a força aplicada pelo motor é de $F_{ext} = F_{at} = 1N$, e a força média é $F_{med} = F_{at} * 0,2s/1s = 0,2N$.

4) Dois pêndulos de comprimento L = 2,5 m estão suspensos juntos conforme a figura abaixo. O pêndulo 1 (de massa $m_1 = 1,0\,kg$) é solto a partir do repouso de uma altura h= 80 cm enquanto que o pêndulo 2 (de massa $m_2 = 3,0\,kg$) está em repouso na posição vertical.

Considerando inicialmente que a colisão é elástica determine:

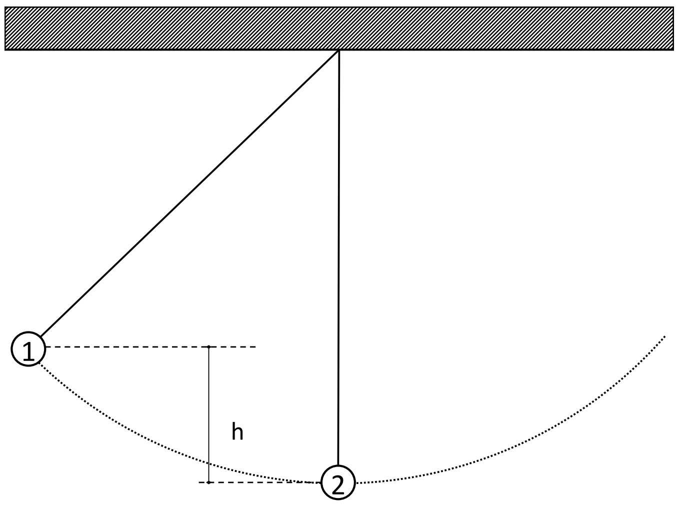
a) (0.5) A velocidade do pêndulo 1 imediatamente antes do choque.

b) (1.0) A velocidade de cada pêndulo imediatamente depois do choque.

c) (0.5) Supondo agora que a colisão seja inelástica e os dois pêndulos fiquem grudados após a colisão, qual a máxima altura que os dois pêndulos atingem. ?

d) (0.5) Quanta energia foi dissipada na colisão inelástica?

Dado: g= 10 m/s^2.



Resposta Q4:

a) Por conservação de energia:

$E_i = E_f$

$U_i + K_i = U_f + K_f$

Tomando o ponto mais baixo como referencial de energia potencial U nula, e calculando a energia cinética K

$m_1 * g * h + 0 = 0 + \frac{1}{2} m_1 * (v_1)^2$

$v_1 = \sqrt{2 * 10(m/s^2) * 0,8\,m} = 4\,m/s$

b) colisão elástica

Por conservação de momento:

$m_1 * v_{1i} + m_2 * v_{2i} = m_1 * v_{1f} + m_2 * v_{2f}$

$m_1 * (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 * v_{2f}$

Por conservação de energia:

$\frac{1}{2}m_1 * v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 * v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1 * v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 * v_{2f}^2$

$m_1 * (v_{1i} - v_{1f}) * (v_{1i} + v_{1f}) = m_2 * v_{2f}^2$

Resolvendo o sistema temos:

$v_{1f} = -2m/s, \qquad v_{2f} = 2m/s$

c) Colisão inelástica:

Por conservação do momento:

$m_1 * v_{1i} + m_2 * v_{2i} = (m_1 + m_2) * v_f$

$v_f = \frac{m_1}{m_1 + m + 2} * v_{1i} = 1m/s$

Após a colisão, por conservação de energia,

$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) * v_f^2 = (m_1 + m_2) * g * h'$

substituindo os valores, teremos:

$h' = 5\,cm$

d) A variação de energia é

$\Delta K = K_f - K_i$

$\Delta K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) * v_f^2 - \frac{1}{2}(m_1) * v_i^1$

$\Delta K = -6\,J$

Negativo, posto que é dissipada.