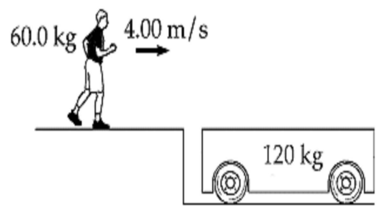
FEP2195-Física para a Engenharia I - 2^a Prova - Gabarito - 13/05/2010

Dados: Considere $g = 10m/s^2$.

1) Uma pessoa de 60 kg, correndo inicialmente com uma velocidade de 4 m/s pula em um carrinho de 120 kg que encontra-se inicialmente em repouso. Ao pular, a pessoa escorrega, vindo a deslizar sobre a superfície superior do carrinho até parar, ficando em repouso em relação a este. O coeficiente de atrito cinético entre a pessoa e a superfície do carrinho é de 0,4. O atrito entre o carrinho e o solo pode ser desprezado. Pede-se calcular:



a) (0,5) A velocidade final do sistema carrinho mais pessoa em relação ao solo.

b) (0,5) A força de atrito atuando sobre a pessoa enquanto ela está deslizando.

c) (1,0) O trabalho realizado pela força de atrito e o deslocamento da pessoa sobre a superfície do carrinho em relação ao carrinho.

d) (0,5) A variação da energia cinética do carrinho.

Solução:

a) seja m_p, v_p a massa e a velocidade da pessoa e m_c, v_c a massa e a velocidade do carrinho, então podemos escrever que:

$$m_p v_p = (m_p + m_c) v_c \Rightarrow v_c = \frac{m_p v_p}{(m_p + m_c)} = \frac{60.4}{180} = \frac{4}{3} m/s$$

b)

$$F_{at} = \mu N = 0,4.60.10 = -240N\mathbf{i}$$

(o sinal de menos é devido ao fato de a força de atrito ter a direção contrária ao vetor unitário **i** que representa a direção do movimento)

c)

$$\Delta K = W$$
$$W = \frac{m_p v_{p,f}^2}{2} - \frac{m_p v_{p,i}^2}{2} = \frac{60}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{60.16}{2} = -\frac{1280}{3} J$$
$$W = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{F}.\mathbf{dl} = -240N.\Delta x_h = -\frac{1280}{3} J \Rightarrow \Delta x_h = \frac{1280}{3.240} = \frac{16}{9} m \text{ em relação ao solo.}$$

Deslocamento do carrinho:

$$x_c(t) = \frac{240N}{120kg}\frac{t^2}{2} = t^2\, m/s^2 \qquad \rightarrow \qquad v_c(t) = 2t\, m/s$$

Fazendo $v_c(t) = v_f = \frac{4}{3}m/s$, temos $t = \frac{2}{3}s$, e portanto um deslocamento do carrinho de $x_c = \frac{4}{9}m$. O deslocamento do homem na superfíciedo carrinho será

$$\Delta x = x_h - x_c = \frac{16}{9}m - \frac{4}{9}m = \frac{4}{3}m$$

d)

$$\Delta K = \frac{m_c v_{c,f}^2}{2} - \frac{m_p v_{c,i}^2}{2} = \frac{120}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^2 = 107J$$

2) Considere um potencial, descrevendo uma força conservativa, dado pela função

$$\begin{aligned} U(x) = \frac{k}{2}x^2, &\qquad \text{se}|x| < A \\ \frac{k\,A^4}{2\,x^2}, &\qquad \text{se}|x| \geq A. \end{aligned}$$

a) (1,0) Faça o gráfico da função potencial $U(x)$ e da força $F(x)$ associada a este potencial, indicando os pontos de máximo e mínimo locais, os pontos em que $U(x) = 0$ e $F(x) = 0$, e os valores assintóticos para os limites de $x \to \infty$ e $x \to -\infty$.

b) (1,0) Desejamos empregar este potencial para aprisionar uma partícula de massa M. Qual é a velocidade máxima v_M da partícula, em $x = 0$, para que a mesma fique confinada no potencial?

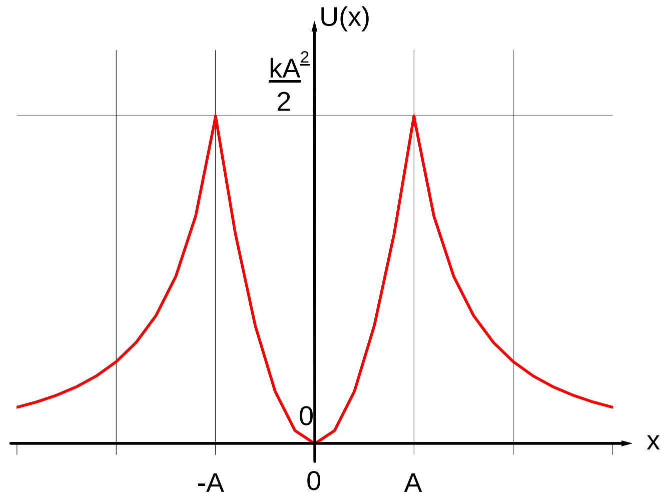
c) (0,5) Para uma partícula com velocidade $v > v_M$, vinda de $|x| \gg A$, podemos realizar o aprisionamento adicionando uma força dissipativa: na região entre $-A$ e A, a partícula sofre pequenas variações de momento Δp, opostas ao seu deslocamento, a um intervalo médio τ (muito menor que o tempo de vôo nesta região), resultando em uma força de atrito constante $F_A = \Delta p/\tau$ se sua velocidade não for nula. Qual a velocidade máxima de aprisionamento da partícula em função dos parâmetros desta armadilha?

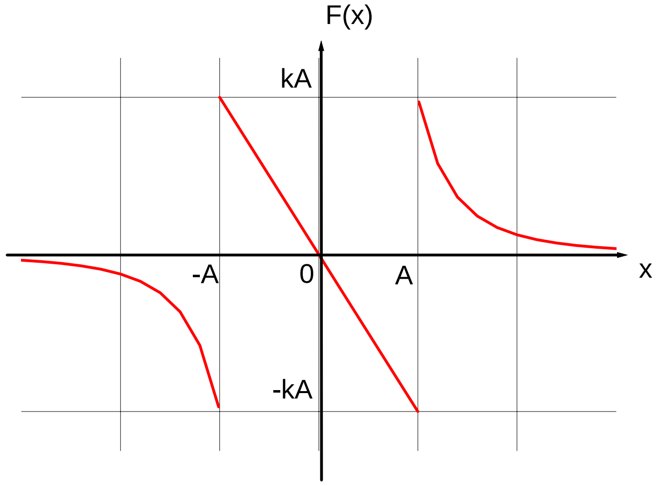
Um sistema semelhante é empregado para aprisionar e resfriar átomos usando campos magnéticos e feixes laser.

Solução: a) Por derivação temos

$$\begin{aligned} F(x) = -kx, &\qquad \text{se}|x| < A \\ \frac{k\,A^4}{x^3}, &\qquad \text{se}|x| \geq A. \end{aligned}$$

O valor assintótico de $F(x)$ e $U(x)$ no limite $x \to \infty$ é zero, e $U(A) = U(-A) = kA^2/2$. $F(x)$ será descontínua nestes pontos, e seu valor deve ser calculado usando as duas funções. O gráfico resultante será:





b) Em $x = 0$, $U(x) = 0$, e a partícula tem apenas energia cinética $T = mv^2/2$. O valor máximo de potencial é dado por $U(A) = U(-A) = kA^2/2$. Se $T \geq U(A)$, a partícula desloca-se até o ponto de máximo do potencial, e escapa da região de aprisionamento. Portanto, para a partícula permanecer confinada, temos $T < U(A)$, e portanto $v < A\sqrt{k/m}$.

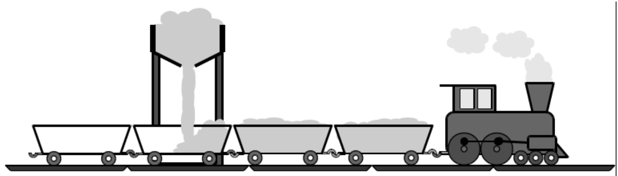
c) A partícula, com energia inicial v_0, e energia cinética $T_0 = m{v_0}^2/2$, sofrerá na região entre $-A$ e A a ação de uma força conservativa do potencial $U(X)$, mais uma força de atrito constante F_A. O trabalho realizado pela força de atrito neste intervalo será

$$W_A = \int_{-A}^{A} F_A dx = 2AF_A$$

Ela ficará presa se no processo dissipativo a perda de energia for maior que a diferença entre a energia cinética inicial somada à energia potencial no limite da região de aprisionamento.

$$W_A > T_0 - U(A)$$
$$2AF_A > \frac{m}{2}v^2 - \frac{k}{2}A^2$$
$$|v| < \sqrt{\frac{4AF_A + kA^2}{m}}$$

3)Um trem é carregado com areia ao passar sob uma ponte. A areia é despejada nos vagões à taxa de $500kg$ por segundo. Como a areia é despejada verticalmente de uma altura de vários metros, ao atingir a caçamba do vagão, a velocidade dos grãos de areia é de cerca de $14m/s$. A massa do vagão vazio é de $2.000kg$, e é preenchido com $6.000kg$ de areia ao passar sob a ponte.



a)(1,0) Desprezando-se as perdas por atrito com os trilhos, determine a força que a locomotiva precisa fazer para puxar o trem a uma velocidade constante de $0,5m/s$ e a potência necessária para manter o movimento. Note que como o sistema não pode ser considerado como uma partícula não é conveniente a utilização do teorema trabalho-energia cinética.

b)(1,0) Determine a força suportada pelo trecho de trilhos sob um vagão quando este estiver 50% preenchido de areia. Suponha que o trecho de trilhos em questão suporta somente este vagão neste momento.

c) (0,5) Se a locomotiva desengatar do primeiro vagão quantos segundos se passarão até que o restante do trem reduza sua velocidade à metade da inicial? Suponha que a massa do restante do trem (incluindo a areia) seja de $10.000kg$ no instante do desengate.

Solução:

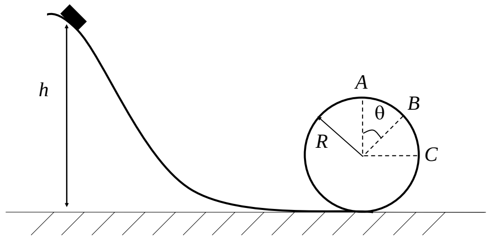
a) Como a areia cai com velocidade horizontal nula no vagão, é necessário transferir a ela um impulso $dJ_x = dmv_T$ para que a massa dm que caiu no intervalo dt atinja a velocidade do trem $v_T = 0,5\text{m/s}$. Como o impulso é dado por $dJ_x = F_x dt$ a força horizontal média é $F_x = \frac{dm}{dt}v = 500 \times 0,5 = 250\text{N}$. A potência é dada por $P = F_x v = 250 \times 0,5 = 125\text{W}$.

b) A massa total do vagão, quando 50% preenchido é $m_V = 2000 + 0,5 \times 6000 = 5000\text{kg}$, e seu peso $m_V g = 50000\text{N}$. A força adicional vertical correspondente ao impulso necessário para frear a areia que cai atingindo o vagão com velocidade vertical $v_a = 14$ m/s é $F_y = \frac{dm}{dt}v_a = 500 \times 14 = 7000\text{N}$, portanto a força total suportada pelo trilho é a soma destas duas forças verticais $N = 57000\text{N}$.

c) A força corresponte ao impulso horizontal *absorvido* do trem pela areia agora depende do tempo, através da velocidade instantânea do trem $v_x(t)$, isto é, $F_x(t) = -\frac{dm}{dt}v_x(t)$ (o sinal de menos indica que esta força é oposta à direção da velocidade). Pela segunda lei: $F_x(t) = m\frac{dv_x(t)}{dt} = -\frac{dm}{dt}v_x(t)$, onde m é a massa total do trem no instante t. Rearranjando: $\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{dm}{m}$. Integrando dos dois lados esta equação, considerando os limites de integração de v_T até $\frac{v_T}{2}$ para a velocidade e $m_0 = 10000\text{kg}$ até m_F para a massa temos:$\ln\frac{1}{2} = \ln\frac{m_0}{m_F}$, ou seja, a massa final do trem será $m_F = 2m_0 = 20000\text{kg}$. O tempo necessário para que caia a massa $m_a = m_F - m_0 = 10000\text{kg}$ de areia é $t = \frac{10000}{500} = 20\text{s}$.

Outra maneira de chegar a este resultado é considerar conservação da componente x do momento linear total do sistema *"trem-com-areia (m_0) mais massa-de-areia-que-cairá (m_a)"* sobre o qual não atua nenhuma força externa horizontal: $P_x = m_0 v_T + 0 m_a = m_0 v_T = (m_0 + m_a)\frac{v_t}{2}$, de onde se obtem a massa de areia $m_a = m_0 = 10000\text{kg}$, e daí o tempo de 20s como na solução anterior.

4) Num parque de diversões, um carrinho desce sem atrito de uma altura h para dar a volta num loop circular de raio R, conforme mostrado na figura.



a) (1,0) Qual é o menor valor de h (chame este valor h_1) necessário para que o carrinho faça a volta completa do loop?

b) (1,0) Se $R < h < h_1$, o carrinho cai do trilho em um ponto B, quando ainda falta percorrer mais um ângulo θ para chegar até o topo A. Calcule θ.

c) (0,5) Suponha que agora, por alguma razão, haja atrito cinético entre o carrinho e o trilho. Sabendo que o carrinho foi solto (no repouso) da altura $h = 2R$ e que ele passou no ponto C do loop com velocidade escalar v_c, qual é o trabalho realizado pela força de atrito até o ponto C?

Solução:

a)

Apenas a força normal N e a força peso P atuam sobre o carrinho. Como a força normal é perpendicular ao deslocamento a qualquer momento, o trabalho dela é nulo. Nestas condições, apenas a força peso realiza trabalho. Como esta força é conservativa, a energia mecânica do sistema é conservada, e podemos escrever:

$$E_{M_1} = E_{M_A} \quad \rightarrow \quad mgh_1 = mg(2R) + \frac{1}{2}mv_A^2 \quad \rightarrow \quad v_A^2 = 2g(h_1 - 2R)$$

onde supusemos o eixo y orientado para cima e com origem no solo.

Para dar uma volta completa, o carrinho deve encostar no trilho a qualquer momento, o que significa que a força normal deve sempre atuar sobre ele. No ponto mais alto A, podemos então dizer que $|\vec{N}| = N \geq 0$. Portanto, no ponto A, ao longo do eixo radial da trajetória circular, temos

$$\sum F_{ext} = ma = P + N = m\frac{v_A^2}{R} \quad \rightarrow \quad N = m\frac{v_A^2}{R} - P = m\frac{2g(h_1 - 2R)}{R} - mg \geq 0$$

$$\rightarrow \quad 2(h_1 - 2R) \geq R \quad \rightarrow \quad h_1 \geq \frac{5}{2}R$$

A altura mínima é portanto $\boxed{h_1 = \frac{5}{2}R}$

b)

Usando o mesmo raciocínio que para o item a, temos

$$mgh = mg(R + R\ \cos\theta) + \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \rightarrow \quad v_B^2 = 2g(h - R(1 + \cos\theta))$$

onde a altura do ponto B em relação ao solo é $R + R\ cos\theta$.
Como o carrinho se desprende do trillho no ponto B, temos que, naquele ponto, N=0. Podemos portanto novamente escrever que, ao longo do eixo radial da trajetória circular,

$$\sum F_{ext} = ma = P\cos\theta = m\frac{v_B^2}{R} \quad \rightarrow \quad mg\ \cos\theta = m\frac{2g(h - R(1 + \cos\theta))}{R}$$

$$\rightarrow \quad gR\cos\theta = 2gh - 2gR - 2gR\cos\theta \quad \rightarrow \quad \cos\theta = \frac{2(h - R)}{3R}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\theta = Ar\cos\left(\frac{2}{3}\left(\frac{h}{R} - 1\right)\right)}$$

c)

Agora, além da força peso, a força de atrito cinético $\vec{f}_a$ também realiza um trabalho. Como esta força é dissipativa, haverá perda de energia mecânica do sistema, e podemos escrever

$$T_{f_a} = \Delta E_M \quad \rightarrow \quad T_{f_a} = mgR + \frac{1}{2}mv_C^2 - mg2R = \boxed{\frac{1}{2}mv_C^2 - mgR}$$