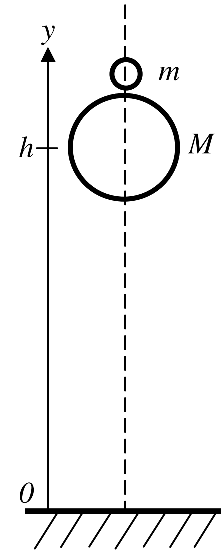
FEP2195 – Física Geral e Experimental para a Engenharia I
Gabarito da prova 2 – 14/05/2009

1) Uma bola de basquete (de massa *M*) e uma bola de tênis (de massa *m*) são abandonadas do repouso a uma altura *h* do solo, conforme mostrado na figura. Os centros das duas bolas estão alinhados verticalmente. Despreze qualquer influência do ar, assim como as dimensões das duas bolas frente à altura *h*. Expresse todas as suas respostas em função de *g, h, M*, *m, Δt* e use o referencial indicado na figura.



a) (0,5) Calcule a velocidade das bolas na iminência de atingirem o solo.
b) (1,0) Sabendo que não há contato entre as bolas na situação inicial, calcule a velocidade da bola de basquete logo após ricochetear elasticamente com o chão, assim como a força resultante média aplicada sobre a bola de basquete durante a colisão como solo, se esta durou *Δt* s.
c) (0,5) Supondo que as duas bolas colidam elasticamente logo em seguida, calcule a nova velocidade da bola de tênis. Para simplificar os cálculos, considere *M*>>*m*.
d) (0,5) Calcule a altura máxima que a bola de tênis atingirá após a colisão.

---

a) As dimensões das duas bolas podem ser desprezadas frente à altura *h*, o que significa que as duas bolas caem da mesma altura *h*. A única força que atua sobre elas durante a queda é a gravidade que é uma força conservativa. Portanto a energia mecânica E_M é conservada, e temos:

posição 1: em cima, parado   posição 2: em baixo, logo antes de chegar no solo

$$E_{M_1} = E_{c1} + E_{p1} = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_1^2 + mgy_1 = 0 + mgh = mgh$$

$$E_{M_2} = E_{c2} + E_{p2} = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_2^2 + mgy_2 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_2^2 + 0 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_2^2$$

$$E_{M_1} = E_{M_2} \rightarrow mgh = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_2^2 \rightarrow \mathrm{v}_2 = \pm\sqrt{2gh}\ \ (m/s)$$

Antes de colidirem com o solo, as duas bolas possuem a mesma velocidade $\boxed{-\sqrt{2gh}\ \ (m/s)}$ **(no referencial da figura)**, uma vez que esta velocidade não depende da massa das bolas.

b) Como o choque da bola de basquete com o solo é elástico, a sua energia cinética deve ser a mesma logo antes e depois da colisão, o que leva a **uma velocidade** $\boxed{+\sqrt{2gh}\ \ (m/s)}$ **logo depois do choque**. O sinal foi invertido já que agora a bola está subindo.

Segundo o teorema do impulso-momento linear, o impulso da força resultante média (considerada constante) que atua sobre a bola de basqueste durante a colisão com o solo é dada por

$$\vec{J} = \vec{F}\Delta t = \Delta\vec{P}$$

Neste problema, todas as forças atuam ao logo do eixo y, e podemos considerar apenas a componente y da relação:

$$J_y = F_y \Delta t = \Delta P_y = M\sqrt{2gh} - \left(-M\sqrt{2gh}\right) = M\sqrt{8gh} \quad \rightarrow \quad F_y = \frac{M\sqrt{8gh}}{\Delta t} \ (N)$$

A força resultante média é vertical, positiva (aponta para cima) e possui módulo $\boxed{\frac{M\sqrt{8gh}}{\Delta t} \ (N)}$.

c) Se a colisão occorrer exatamente em baixo, a resultante das forças externas é nula (força peso e normal se compensam para cada bola) e as duas bolas são sujeitas apenas às forças internas da colisão. Neste caso, existe conservação do momento linear e, como a colisão entre as duas bolas é considerada eástica, podemos usar a relação das velocidades relativas ao longo do eixo y (os índices 1 e 2 identificam os momentos logo antes e depois da colisão entre as duas bolas):

$$\mathrm{v}_{B_1} - \mathrm{v}_{t_1} = -\left(\mathrm{v}_{B_2} - \mathrm{v}_{t_2}\right)$$

Como a massa da bola de basquete é considerada muito maior que a massa da bola de tênis (M>>m), podemos supor que o movimento da bola de basquete não será alterado pela colisão. Portanto, podemos supor que $\mathrm{v}_{B_1} = \mathrm{v}_{B2}$ e escrever que

$$\sqrt{2gh} - \left(-\sqrt{2gh}\right) = -\left(\sqrt{2gh} - \mathrm{v}_{t_2}\right) \quad \rightarrow \quad \mathrm{v}_{t_2} = \sqrt{18gh} \ (m/s)$$

A velocidade da bola de tênis é vertical, positiva (aponta para cima) e possui módulo $\boxed{\sqrt{18gh} \ (m/s)}$

d) Após iniciar a subida, a bola de tênis está novamente em queda livre, com apenas a força da hgravidade atuando sobre ela. Podemoa assim usar a conservação da energia mecânica para encontrar a altura máxima que atingirá:

posiçãoo 1: em baixo; posição 2: em cima, na altura máxima

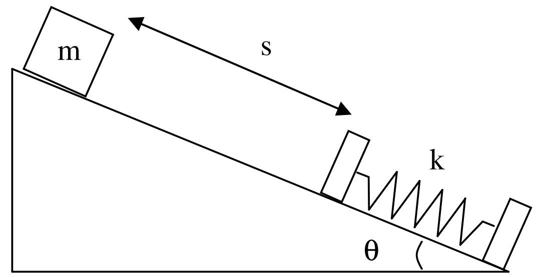
$$E_{M_1} = E_{c_1} + E_{p_1} = \frac{1}{2} m\mathrm{v}_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2} m\left(\sqrt{18gh}\right)^2 + 0 = 9mgh$$

$$E_{M_2} = E_{c_2} + E_{p_2} = \frac{1}{2} m\mathrm{v}_2^2 + mgy_2 = 0 + mgy_2 = mgy_2$$

$$E_{M_1} = E_{M_2} \quad \rightarrow \quad 9mgh = mgy_2 \quad \rightarrow \quad \boxed{y_2 = 9h \ (m)}$$

A bola de tênis subirá até uma altura 9 vezes maior que a altura inicial em que foi solta.

2) Um bloco de massa m é abandonado a uma distância s de uma mola ideal de massa desprezível que tem constante de força k, localizada ao longo de um plano inclinado fazendo um ângulo θ com a horizontal, como mostrado na figura. A constante da mola é grande o suficiente para que você possa desprezar sua pequena compressão em comparação com s. Expresse todas as suas respostas em função de m, g, s, k, θ e μ_c.



a) (1,0) Se o coeficiente de atrito cinético entre o plano e o bloco for μ_c, calcule a máxima compressão x da mola após o bloco ter se chocado com ela.

b) (1,0) Para as condições do item a, qual é a distância d ao longo do plano que o bloco percorrerá após deixar a mola? Pode também desprezar a pequena compressão da mola em comparação com d.

c) (0.5) Durante todo esse percurso (descida e subida do bloco), qual foi o trabalho realizado pela resultante de todas as forças exercidas sobre o bloco?

---

a) A força da gravidade e da mola são forças conservativas, mas a força de atrito cinética é não conservativa e realiza trabalho. Neste caso,

$$T_{f_{ac}} = \Delta E_M = E_{M_2} - E_{M_1}$$

onde as posições 1 e 2 do bloco correspondem à posição inicial (em cima, parado) e em baixo (com a mola comprimida no máximo). Usando um eixo y positivo para cima, com orígem na posição 2, e chamando x a compressão máxima da mola,

$$E_{M_1} = E_{c_1} + E_{p_{g1}} + E_{p_{el1}} = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_1^2 + mgy_1 + \frac{1}{2}kx_1^2 = 0 + mg(s+x)\,sen\theta + 0 = mg(s+x)\,sen\theta$$

Mas como $x << s$, podemos escrever que $(s+x) \approx s$, o que leva a

$$E_{M_1} = mgs\,sen\theta$$

$$E_{M_2} = E_{c_2} + E_{p_{g2}} + E_{p_{el2}} = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_2^2 + mgy_2 + \frac{1}{2}kx_2^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

$$T_{f_{ac}} = \vec{f}_{ac} \bullet \vec{\ell} = \mu_c N\ell\cos(180^o) = -\mu_c mg(s+x)\cos\theta \approx -\mu_c mgs\cos\theta$$

$$T_{f_{ac}} = E_{M_2} - E_{M_1} \quad \rightarrow \quad -\mu_c mgs\cos\theta = \frac{1}{2}kx^2 - mgs\,sen\theta \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{2mgs(sen\theta - \mu_c\cos\theta)}{k}}$$

A maior compressão da mola é portanto $\boxed{x = \pm\sqrt{\frac{2mgs(sen\theta - \mu_c\cos\theta)}{k}} \quad (m)}$

b) Vamos supor que o bloco vai parar numa posição 3, entre as posições 1 e 2. Tomando como posição inicial a posição 2, e como posição final a posição 3, podemos novamente usar o mesmo princípio que no item a):

$$T_{f_{ac}} = \Delta E_M = E_{M_3} - E_{M_2} \text{, onde}$$

$$T_{f_{ac}} = \vec{f}_{ac} \bullet \vec{d} = \mu_c N d \cos(180^o) = -\mu_c mg(d+x)\cos\theta \approx -\mu_c mgd\cos\theta$$

$$E_{M_2} = E_{c_2} + E_{p_{g2}} + E_{p_{el2}} = \frac{1}{2}m\text{v}_2^2 + mgy_2 + \frac{1}{2}kx_2^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_{M_3} = E_{c_3} + E_{p_{g3}} + E_{p_{el3}} = \frac{1}{2}m\text{v}_3^2 + mgy_3 + \frac{1}{2}kx_3^2 = 0 + mg(d+x)\,sen\theta + 0 \approx mgd\ sen\theta$$

$$T_{f_{ac}} = E_{M_3} - E_{M_2} \quad \rightarrow \quad -\mu_c mgd\cos\theta = mgd\ sen\theta - \frac{1}{2}kx^2$$

$$\rightarrow \quad d = \frac{\frac{1}{2}kx^2}{mg(sen\theta + \cos\theta)} = \frac{\frac{1}{2}k\left(\sqrt{\frac{2mgs(sen\theta - \mu_c\cos\theta)}{k}}\right)^2}{mg(sen\theta + \cos\theta)} = s\frac{(sen\theta - \mu_c\cos\theta)}{(sen\theta + \cos\theta)}$$

Portanto, o bloco voltará a subir uma distância $\boxed{d = s\frac{(sen\theta - \mu_c\cos\theta)}{(sen\theta + \cos\theta)}\ (m)}$ **ao longo do plano** inclinado antes de parar novamente.

c) Aplicando o teorema do trabalho - energia cinética (TEC) à resultante de todas as forças que atuam sobre o corpo entre as posições 1 e 3, temos

$$T_{F_{res}} = \Delta E_c = E_{c_3} - E_{c_1} = 0 - 0 = \boxed{0\ J}$$

Portanto, o trabalho realizado pela resultante das forças entre as posições 1 e 3 é nulo.

3) Uma partícula de massa m = 1 kg se move ao longo do eixo x sob o efeito de uma força conservativa $F(x) = 3x^2 - 12x + 9$ (N).

a) (0,5) Se a energia potencial da partícula for nula na posição x = 1 m, encontre a expressão dela para qualquer valor de x.
b) (1,0) Encontre as posições de equilíbrio do sistema e determine a sua natureza (estável/ instável). Justifique.
c) (0,5) Se a partícula for abandonada na origem com velocidade nula, qual será a energia cinética dela em x = 2 m?
d) (0,5) Qual é o trabalho realizado pela força $F(x)$ quando a partícula se desloca de x = 2 m até x = 1 m?

---

a) Como a força $F(x)$ é conservativa, sabemos que existe uma função energia potencial $E_p(x)$ tal que

$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx} \quad \rightarrow \quad dE_p(x) = -F(x)dx$$

Integrando os dois membros, obtemos que

$$E_p(x) = -\int F(x)dx = -\int \left(3x^2 - 12x + 9\right)dx = -x^3 + 6x^2 - 9x + C$$

onde C é uma constante de integração. Sabendo que $E_p(1)=0\ J$, podemos determinar a constante de integração C:

$$E_p(1) = -(1)^3 + 6(1)^2 - 9(1) + C = 0 \qquad \rightarrow \qquad C = 4$$

A energia potencial da partícula é portanto $\boxed{E_p(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4 \quad (J)}$

b) A partícula estará em equilíbrio quando a resultante das forças que atuam sobre ela for nula.

$$F(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x^2 - 4x + 3 = 0$$

As raízes desta equação do segundo grau são

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{4 \pm 2}{2} = \boxed{3\,m \quad \text{ou} \quad 1\,m}$$

Para encontrar a natureza destas duas posições de equilíbrio, basta calcular a derivada segunda da função $E_p(x)$ e conferir o sinal dela nos pontos x = 1 m e x = 3 m.

$$\frac{d^2E_p(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(-x^3 + 6x^2 - 9x + 4\right) = -6x + 12$$

Em x = 3 m, a derivada segunda de $E_p(x)$ vale -6. A concavidade da energia potencial naquela região é para baixo, significando que a posição de equilíbrio é instável.

Em x = 1 m, a derivada segunda de $E_p(x)$ vale +6. A concavidade da energia potencial naquela região é para cima, significando que a posição de equilíbrio é estável.

c) Se a partícula for abandonada na posição x = 0, sua energia cinética naquele ponto será nula, e sua energia potencial valerá $E_p(0) = -(0)^3 + 6(0)^2 - 9(0) + 4 = 4\ J$. Portanto, a energia mecânica da partícula, que é conservada já que a força resultante que atua sobre a partícula é conservativa, vale a qualquer momento 4 J.

Na posição x = 2 m, a energia potencial da partícula é $E_p(2) = -(2)^3 + 6(2)^2 - 9(2) + 4 = 2\ J$. Naquela posição, a energia cinética será então

$$E_c(2) = E_M - E_p(2) = 4 - 2 = \boxed{2\ J}$$

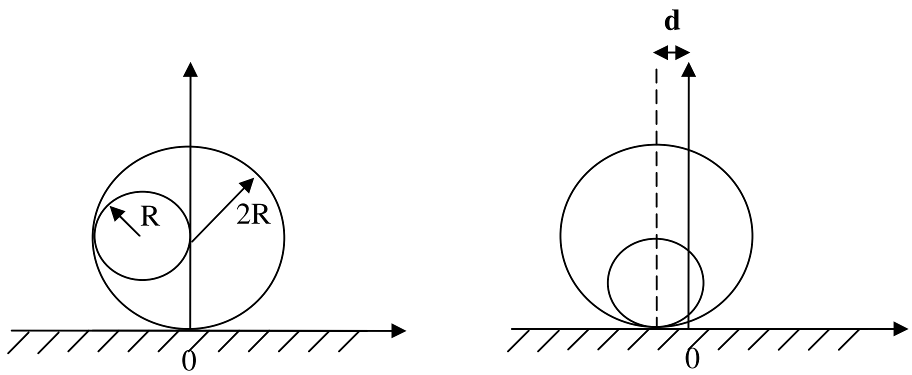
d) Como a força resultante é conservativa, temos que

$$T_{F_{res}} = -\Delta E_p = -(E_p(1) - E_p(2)) = -(0-2) = \boxed{2\ J}$$

4) Uma bola de massa m e raio R é colocada no interior de uma esfera oca de raio $2R$ e de mesma massa m. Inicialmente, o sistema está no repouso sobre o solo, na configuração ilustrada pela figura a. A bola é então solta, e rola para baixo e para cima, dentro da esfera, até chegar no repouso na parte inferior da esfera, conforme mostrado na figura b.

a) (1,5) De que distância horizontal d a esfera se deslocou em relação à sua posição inicial, uma vez que a bola chegou no repouso na parte inferior da esfera?

b) (1,0) Cite as forças que atuam sobre o sistema, mencione que princípio físico usou para resolver o item a) do problema, e explique como e por que este princípio pode ser usado neste caso específico.



(a) **(b)**

a) Usando a conservação do momento linear total horizontalmente (ver item b)), podemos escrever

$$P_x = M\text{v}_{CM_x}$$

Mas sabemos que inicialmente o sistema está parado. Portanto,

$$P_x = 0 \quad \rightarrow \quad \text{v}_{CM_x} = 0 \quad \rightarrow \quad x_{CM} = \text{constante}$$

Podemos calcular a posição x_{CM} do centro de massa na posição inicial (figura a):

$$x_{CM} = \frac{m_{bola}x_{bola} + m_{esfera}x_{esfera}}{m_{bola} + m_{esfera}} = \frac{mR + 0}{2m} = \frac{R}{2}$$

Supondo que, na configuração final (figura b), a esfera se deslocou de uma distância d em relação à posição inicial (figura a), a componente horizontal da posição do centro de massa é agora

$$x_{CM} = \frac{m_{bola}x_{bola} + m_{esfera}x_{esfera}}{m_{bola} + m_{esfera}} = \frac{-md - md}{2m} = -d$$

Como estes dois valores devem ser iguais, $d = -\frac{R}{2}(m)$

Portanto, o sistema se deslocou de uma distância $\boxed{d = \frac{R}{2}(m)}$ **para a esquerda da posição inicial.**

b) As forças externas que atuam sobre o sistema são a força peso da bola e da esfera, assim como a força normal do chão que atua sobre esfera. Todas estas forças externas atuam verticalmente. A força normal entre a esfera e a bola, assim como a eventual força de atrito entre a esfera e a bola (que faz com que a bola acaba chegando no repouso) são forças internas. Como não existem forças externas atuando horizontalmente, podemos usar a conservação do momento linear total do sistema horizontalmente:

$$\sum \vec{F}_{ext_x} = \frac{d\vec{P}_x}{dt} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \vec{P}_x = \text{constante}$$