Gabarito da Prova P1 - Física 1

1. Duas partículas (1 e 2) se movem ao longo do eixo x e y, respectivamente, com velocidades constantes $\vec{v}_1 = 2\hat{x}\ cm/s$ e $\vec{v}_2 = 3\hat{y}\ cm/s$. Em $t = 0$ s elas estão nas posições:

$$(x_1, y_1) = (-3, 0) \text{ cm}, \quad (x_2, y_2) = (0, -3) \text{ cm}$$

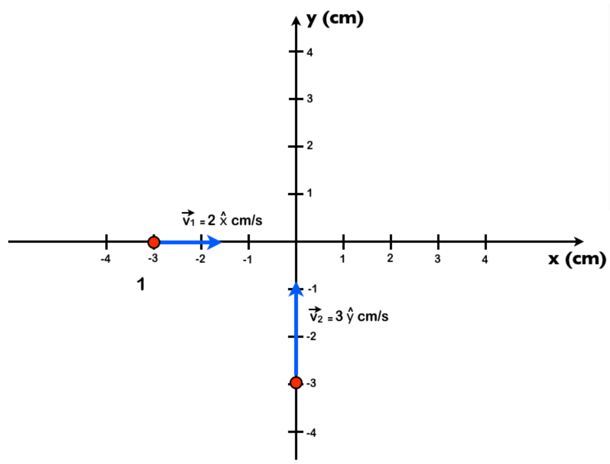
   a) Esboce a situação descrita acima no plano xy no instante $t = 0$ s (0,5 pt).

   b) Escreva algebricamente (usando versores indicados no enunciado) o vetor posição de cada uma das partículas. (0,75 pt).

   c) Determine o vetor que representa a posição relativa da partícula 2 com respeito à partícula 1, como função do tempo (0,5 pt).

   d) Determine o vetor velocidade relativa entre essas duas partículas (0,75 pt).

Solução :



a) Veja a figura acima.

b) Comos as velocidades são constantes, temos

$$\begin{aligned} \vec{r}_1(t) &= [(-3+2t)\hat{x}]\ cm \\ \vec{r}_2(t) &= [(-3+3t)\hat{y}]\ cm \end{aligned}$$

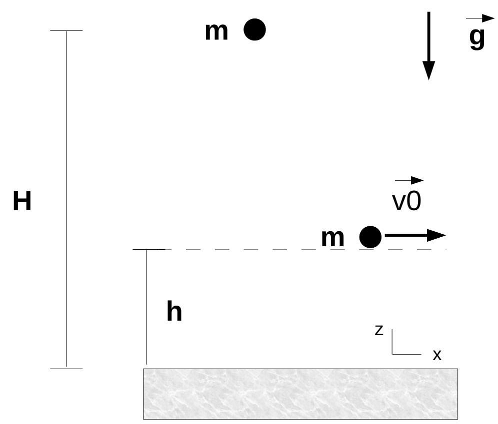
c)

$$\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) = [(3-2t)\hat{x} + (-3+3t)\hat{y}]\ cm$$

d)

$$\vec{v}_2(t) - \vec{v}_1(t) = (-2\hat{x} + 3\hat{y})\ cm/s$$

2. Um corpo de massa m sai do repouso e cai em queda livre de uma altura H com relação ao solo. Quando ele passa pela altura h (veja a figura abaixo) é desviado por um anteparo de modo que assume uma nova velocidade na horizontal tal que o módulo dessa velocidade é igual ao módulo da velocidade que o corpo tinha imediatamente antes de ser desviado.



a) Ache o vetor velocidade com que o corpo é lançado na horizontal. (0.5 pt)

b) A que distância x_A de sua posição inicial o corpo atinge o solo? (1.0 pt)

c) Quais valores de h dariam o mesmo alcance x_A? (0.5 pt)

d) Qual valor de h maximiza x_A? (0.5 pt)
Note que para uma função $f(x)$, o valor $x = x_0$ que maximiza esta função é obtido tomando a derivada com relação a x e igualando a zero de forma que $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} = 0$.

Solução :

a) Usando

$$z = z_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2 \tag{1}$$

vemos que

$$h = H - \frac{g}{2} t_h^2 \tag{2}$$

então o tempo que leva para o corpo chegar em h é $t_h = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$. Nesse ponto, a velocidade em z fica $v_z = -g t_h$, $\vec{v}_z = -\sqrt{2g(H-h)}\hat{z}$. Assim, a velocidade do corpo depois de bater no anteparo será

$$\vec{v}_0 = \sqrt{2g(H-h)}\hat{x}\,. \tag{3}$$

b) Depois de bater no anteparo, o vetor posição do corpo é $\vec{r} = x(t)\hat{x} + z(t)\hat{z}$. A componente z fica $z(t) = h - gt^2/2$ e $x(t) = v_0 t$. O corpo atinge o solo no tempo t_{solo} no qual $z(t_{solo}) = 0$. Assim, vemos que

$$t_{solo} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{4}$$

e assim o alcance $x_A = x(t_{solo}) = \sqrt{2g(H-h)}\sqrt{2h/g} = 2\sqrt{h(H-h)}$.

c) Note que $x_A^2 = 4h(H-h)$. Assim, vemos que $h^2 - hH + x_A^2/4 = 0$, ou seja,

$$h = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - x_A^2}}{2}\,. \tag{5}$$

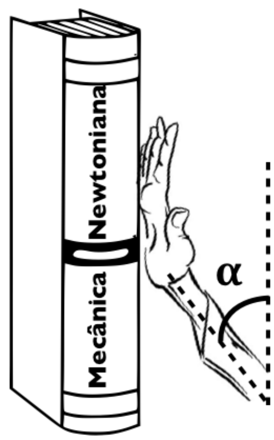
Essas duas raízes fornecem o mesmo alcance x_A.

d) O valor de $h = h^*$ que maximiza x_A será aquele em que

$$\left.\frac{dx_A(h)}{dh}\right|_{h^*} = 0 \Longrightarrow \frac{H - 2h^*}{2\sqrt{h^*(H-h^*)}} \tag{6}$$

então vemos que $h^* = H/2$.

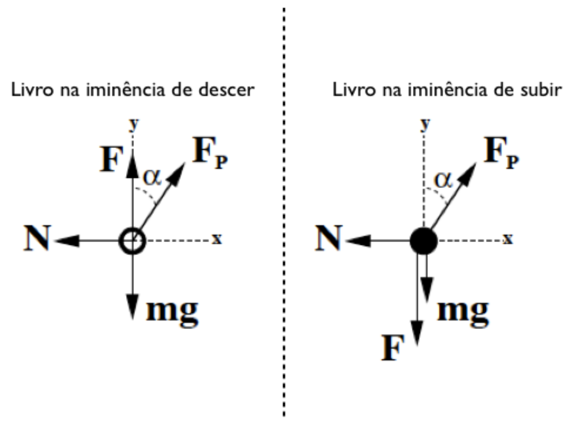
3. Você está segurando um livro contra uma parede vertical aplicando uma força com sua mão. O ângulo entre sua força e a vertical é α ($< 90°$), como mostra a figura abaixo. A massa do livro é m e o coeficiente de atrito estático é μ. Se você empurrar forte demais, o livro começará a deslizar para cima e se você não aplicar força suficiente, o livro deslizará para baixo.



   a) Esboce o diagrama de forças para os dois casos na situação em que o livro está prestes a deslizar. (1.0 pt)
   b) Calcule a magnitude da força que você deve aplicar (como função de α) na iminência do movimento, também nos dois casos. (0.5 pt)
   c) Calcule a magnitude da força aplicada (como função de α) para a qual a força de atrito se anula. Avalie o resultado para $\alpha = 0$ e $\alpha = 90°$. (0.5 pt)
   d) Para um dado ângulo α de aplicação da força, determine o intervalo de valores de μ em que ainda é possível fazer com que o livro deslize para cima. (0.5 pt)

Solução :

a) Diagrama de forças:



b) No caso em que o livro está na iminência de deslizar para baixo, a força de atrito é dada por

$$F_{at} = \mu N,$$

de modo que o equilíbrio nas direções y e x implica

$$\mu N + F_p \cos\alpha - mg = 0$$

$$F_p \sin\alpha - N = 0$$

levando finalmente a

$$F_p = \frac{mg}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha}\,.$$

O mesmo raciocínio para a situação de iminência de deslizamento para cima leva a

$$F = \mu N$$

$$F_p \cos\alpha - \mu N - mg = 0$$

$$F_p \sin\alpha - N = 0$$

logo

$$F_p = \frac{mg}{\cos\alpha - \mu \sin\alpha}\,.$$

c) A força de atrito se anula quando a componente vertical da força aplicada se iguala em módulo a força peso, logo em ambos os casos:

$$F_p \cos\alpha - mg = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad F_p = \frac{mg}{\cos\alpha}\,.$$

Quando $\alpha = 0$ (diretamente na vertical):

$$F_p = \frac{mg}{\cos(0)} = mg\,.$$

Quando $\alpha = \pi/2$ (diretamente na horizontal):

$$F_p = \frac{mg}{\cos(90°)} = \infty,$$

de forma que é impossível segurar o livro com uma força horizontal sem ajuda da força de atrito.

d) A equação de equilíbrio na direção y nesse caso é

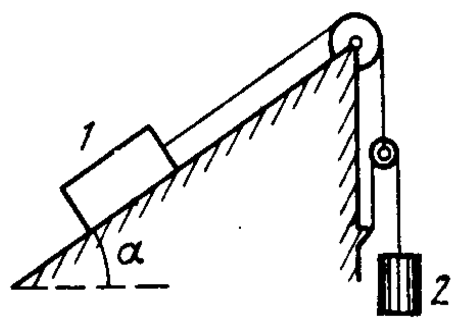
$$F_p = \frac{mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$$

o que implica que para um dado ângulo α, partindo do caso sem atrito $\mu = 0$ e aumentando μ, a situação

$$\cos\alpha - \mu_{lim}\sin\alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu_{lim} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha},$$

indica uma situação não física já que exigiria uma força infinita para mover o livro para cima. Por outro lado, para $\mu < \mu_{lim}$, a força F_p para um dado ângulo α é finita e é possível fazer o livro deslizar para cima aplicando uma força intensa o suficiente.

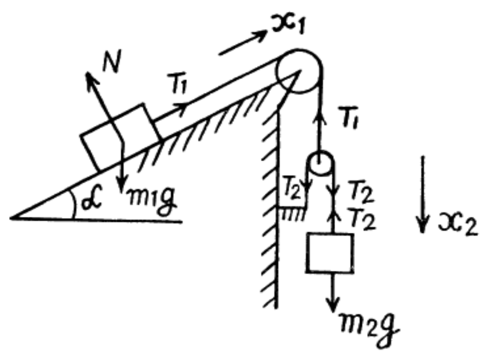
4. Considere o sistema com plano inclinado envolvendo polias esquematizado na figura abaixo. Não considere atrito. Assuma também que a massa das polias e dos fios são desprezíveis em comparação às massas m_1 e m_2 dos blocos 1 e 2, respectivamente. Além disso, os fios não se esticam ou se deformam em geral. Note que a polia que sustenta o bloco 2 está conectada ao fio ligado ao bloco 1 e, assim, essa polia não está fixa.



   a) Esboce o diagrama das forças envolvidas, escreva a relação entre as diferentes tensões nos fios, e expresse a Segunda Lei de Newton para cada caso. (0.5 pt)
   b) Demonstre a relação entre a aceleração a_1 do bloco 1 e a aceleração a_2 do bloco 2. (0.5 pt)
   c) Encontre o valor do ângulo α no qual a_1 muda de sinal. (0.5 pt)
   d) Obtenha a expressão geral para a_1 (0.5 pt)
   d) Calcule o valor a_1 nos limites: $m_2/m_1 \to 0$ e $m_1/m_2 \to 0$. (0.5 pt)

Solução :

a) Como as forças atuam em cada corpo, e também a definição do sistema de coordenadas, pode ser encontrado na figura abaixo.



As forças resultantes em cada corpo são:

$$
\begin{aligned}
T_1 - m_1 g \sin\alpha &= m_1 a_1 \\
g m_2 - T_2 &= m_2 a_2 \,.
\end{aligned}
$$

Como assumimos que a massa da polia pequena é nula, a força resultante sobre ela é nula e assim vemos que $T_1 = 2T_2$.

b) Suponha que o bloco 1 se desloque para cima de uma distância $x(t)$ - sua aceleração é então $a_1 = \ddot{x}(t)$. Como o fio não se estica, necessariamente a polia pequena que sustenta o bloco 2 tem que descer de $x(t)$. Suponha agora que nesse movimento o bloco 2 desça de um certo $y(t)$ com relação à polia que o sustenta. Assim, a aceleração total do bloco 2 será $a_2 = \ddot{x} + \ddot{y} = a_1 + \ddot{y}$. Nesse caso, como o fio não se estica a aceleração no ponto fixo à parede seria $a_{pf} = \ddot{x} - \ddot{y}$. Entretanto, como o ponto é fixo, vemos que $a_{pf} = 0 \Longrightarrow \ddot{x} = \ddot{y}$. Assim, vemos que $a_2 = 2a_1$.

c) A aceleração a_1 muda de sinal quando passa pelo zero. Assim, fazemos $a_1 = a_2 = 0$ nas equações acima. Uma equação nos dá $T_1 = 2gm_2$ enquanto a outra $T_1 = m_1 g \sin\alpha$. Igualando essas expressões encontramos $\sin\alpha = 2m_2/m_1$, ou seja, $\alpha = arcsin\,(2m_2/m_1)$.

d) Usando que $a_2 = 2a_1$ e $T_1 = 2T_2$, manipulamos as expressões para as forças resultantes para mostrar diretamente que

$$
a_1 = g\frac{\left(2\frac{m_2}{m_1} - \sin\alpha\right)}{\left(4\frac{m_2}{m_1} + 1\right)} \,. \tag{7}
$$

e) Direto das expressões para as forças resultantes sobre cada corpo, podemos ver diretamente da equação para o bloco 2 que ao fazermos $m_2/m_1 \to 0$, $T_2 = T_1/2 = 0$, o que implica em $a_1 = -g \sin \alpha$. Quando $m_1/m_2 \to 0$, a equação do bloco 1 nos dá $T_1 = 0$, o que implica pela equação para o bloco 2 que $a_2 = g$, ou seja, $a_1 = a_2/2 = g/2$ - ele não cai em queda livre!