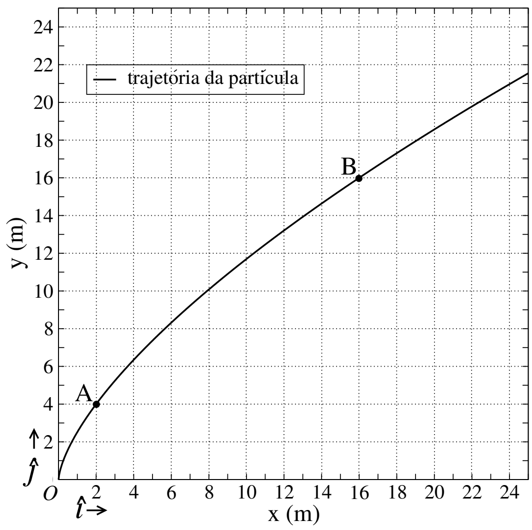
**FEP2195-Física Geral e Exp. para a Engenharia I -**
**1$^a$ Prova - Gabarito 11/04/2013**

1) Sabendo-se que a posição de uma partícula, em relação à origem $O$ do plano $xy$, é determinada pelo vetor:

$$\vec{r}\,(t) = x\,(t)\,\hat{\imath} + y\,(t)\,\hat{\jmath} = \left(\frac{1}{4}\frac{m}{s^3}\right) t^3\hat{\imath} + \left(1\frac{m}{s^2}\right) t^2\hat{\jmath},$$

com $\|\vec{r}\|$ em metros (m) e t em segundos (s), determine:




a) (1,0 pt.) O vetor velocidade instantânea $\vec{v}\,(t)$ e o vetor aceleração instantânea $\vec{a}\,(t)$ em função do tempo.

Solução:

$$\vec{v}\,(t) = \left(\frac{1}{4}\frac{m}{s^3}\right) 3t^2\hat{\imath} + \left(1\frac{m}{s^2}\right) 2t\hat{\jmath} \tag{1}$$

e

$$\vec{a}\,(t) = \left(\frac{1}{4}\frac{m}{s^3}\right) 6t\hat{\imath} + \left(1\frac{m}{s^2}\right) 2\hat{\jmath}. \tag{2}$$

b) (1,0 pt.) O vetor velocidade instantânea no ponto A e o vetor aceleração instantânea no ponto B, ambos os pontos estão indicados no gráfico ao lado. Neste gráfico, a curva contínua representa a trajetória da partícula, descrita através do vetor posição $\vec{r}\,(t)$.

Solução: Em A, t=2s. Portanto

$$\vec{v}\,(2) = \left(3\frac{m}{s}\right)\hat{\imath} + \left(4\frac{m}{s}\right)\hat{\jmath}. \tag{3}$$

Em B, t=4s. Portanto

$$\vec{a}\,(4) = \left(6\frac{m}{s^2}\right)\hat{\imath} + \left(2\frac{m}{s^2}\right)\hat{\jmath}. \tag{4}$$

c) (0,5 pt.) O vetor velocidade média $\vec{v}_m$ e o vetor aceleração média $\vec{a}_m$, ambos entre os pontos A e B (0,5 ponto).

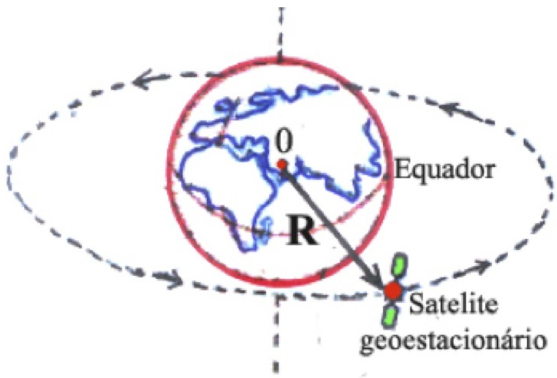
Solução:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}\,(4s) - \vec{r}\,(2s)}{2s} = \left(7\frac{m}{s}\right)\hat{\imath} + \left(6\frac{m}{s}\right)\hat{\jmath} \tag{5}$$

e

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}\,(4s) - \vec{v}\,(2s)}{2s} = \left(\frac{9}{2}\frac{m}{s^2}\right)\hat{\imath} + \left(2\frac{m}{s^2}\right)\hat{\jmath}. \tag{6}$$

2) Os satélites geoestacionários são aqueles que se encontram "parados" em relação a um ponto fixo na superfície terrestre (em geral, sobre a linha do equador terrestre). Por isso são usados como satélites de comunicação. Considere um satélite geoestacionário de massa $m$ com órbita circular de raio $R$ concêntrica com o globo terrestre. Adotando um sistema de referencial polar com centro no planeta Terra, determinar:




a) (0,5 pt.) O período $T_{sat}$ do movimento circular do satélite em segundos.

Solução: A condição para que um satélite seja geoestacionário é equivalente à condição de que sua velocidade angular ($\omega_{sat}$) seja igual à velocidade angular associada ao deslocamento de um ponto no equador terrestre ($\omega_{eqd} = \frac{2*\pi}{T_{rot}}$: $\omega_{sat} = \omega_{eqd}$ Para tal, basta que os períodos sejam iguais. Tendo em vista que o período de rotação da terra é de 24 horas, temos:

$T_{sat} = T_{rot} \simeq 24h = 86.400s.$

(b) (1,0 pt.) O raio da órbita circular em função do período do MCU (movimento circular uniforme), da massa da Terra, $M$ e da constante da gravitação universal, $G$.

Solução: A força na direção radial agindo sobre o satélite é a força de atração gravitacional entre o satélite e a Terra. Ela o atrai para o centro da mesma. Denominando m a massa do satélite, e lembrando que a massa da terra é $M = 6 \times 10^{24}kg$ , e que a constante da gravitação universal é dada por $G = 6,67 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$ e denominando $R$ como a distância do satélite até o centro da Terra, podemos escrever: $F_{radial} = F_{gravitacional}$ A partir da lei de Newton podemos escrever,

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2}$$

donde inferimos que $R = GM/v^2$. Lembramos que $v = \omega R = 2\pi R/T$ . Assim, em termos do período, a distancia até o centro da terra obedece a relação

$R = GMT^2/4\pi^2R^2$ , donde inferimos que ela é dada por:

$$R = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

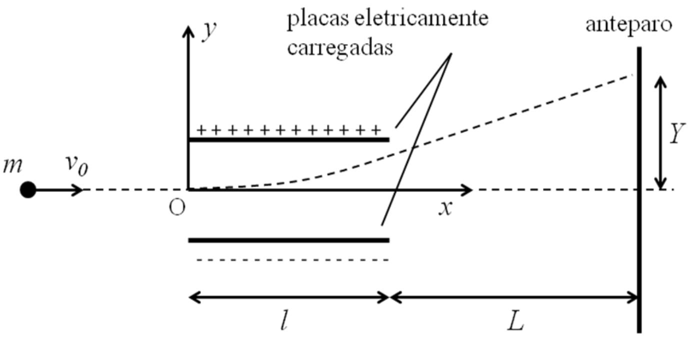
(c) (1,0 pt.) A velocidade escalar (ou módulo do vetor velocidade) em termos dos mesmos parâmetros da parte (b).

Dos itens anteriores teremos

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \sqrt[3]{2\pi \frac{GM}{T}} \tag{7}$$

Dado: Força gravitacional (módulo): $F = \frac{GmM}{R^2}$

3) Um elétron de massa $m$ e velocidade horizontal $v_0$ incide em uma região entre duas placas paralelas eletricamente carregadas, conforme mostra a figura ao lado. Ao percorrer essa região o elétron é submetido a uma força vertical $F$, constante, para cima. Sabendo-se que o comprimento das placas é igual a $l$ e desprezando o efeito da aceleração da gravidade, determine:




a) (1,0 pt.) O vetor posição do elétron $\vec{r}(t)$ em função do tempo, quando este se encontra entre as placas paralelas eletricamente carregadas. Considere que a origem do sistema de coordenadas é do lado esquerdo das placas e que o elétron passa pela origem do sistema de coordenadas no instante $t = 0\,s$, conforme mostra a figura. Expresse o resultado em termos de $m$, $v_0$, $F$, e $t$.

b) (1,5 pts.) O valor de $Y$, quando o elétron atinge um anteparo situado a uma distância $L$ das placas paralelas. Expresse o resultado em termos de $m$, $v_0$, $F$, $l$, $L$. (1,5)

(a) A FORÇA QUE ATUA NA PARTÍCULA NA DIREÇÃO X É IGUAL A ZERO E A POSIÇÃO INICIAL É ZERO PARA $t=0$,

LOGO:

$$x(t) = V_0 t$$

EM Y, A FORÇA QUE ATUA NA PARTÍCULA GERA UMA ACELERAÇÃO $a = \frac{F}{m}$. LOGO:

$$y(t) = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2$$

PORTANTO:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = (V_0 t)\,\hat{i} + \left(\frac{1}{2}\frac{F}{m} t^2\right)\hat{j}}$$

(b) A PARTÍCULA SAI DA REGIÃO ENTRE AS DUAS PLACAS NO INSTANTE $t = \frac{\ell}{V_0}$. A VELOCIDADE DA PARTÍCULA NESTE INSTANTE É CALCULADA DA SEGUINTE FORMA:

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = V_0\,\hat{i} + \left(\frac{F}{m}t\right)\hat{j}$$

EM $t = \frac{\ell}{V_0}$, $\boxed{\vec{V}\left(t = \frac{\ell}{V_0}\right) = V_0\hat{i} + \left(\frac{F}{m}\frac{\ell}{V_0}\right)\hat{j}}$

A POSIÇÃO DA PARTÍCULA EM $t = \frac{\ell}{V_0}$ É DADA POR:

$$\vec{r}\left(\frac{\ell}{V_0}\right) = \ell\,\hat{i} + \left(\frac{1}{2}\frac{F}{m}\frac{\ell^2}{V_0^2}\right)\hat{j}$$

AO SAIR DA REGIÃO DAS PLACAS, A EQUAÇÃO DA POSIÇÃO EM FUNÇÃO DO TEMPO É DADA POR:

$$\vec{r}(t) = V_0 t\,\hat{i} + \left(\frac{F}{m}\frac{\ell}{V_0}t + C\right)\hat{j}$$

ONDE C É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA. PARA DETERMINAR C:

$$Y\left(\frac{\ell}{V_0}\right) = \left(\frac{1}{2}\frac{F}{m}\frac{\ell^2}{V_0^2}\right) = \frac{F}{m}\frac{\ell^2}{V_0^2} + C \Rightarrow \boxed{C = -\frac{1}{2}\frac{F}{m}\frac{\ell^2}{V_0^2}}$$

LOGO

$$\vec{r}(t) = V_0 t\,\hat{i} + \left(\frac{F}{m}\frac{l}{V_0}t - \frac{1}{2}\frac{F}{m}\frac{l^2}{V_0^2}\right)\hat{j}$$

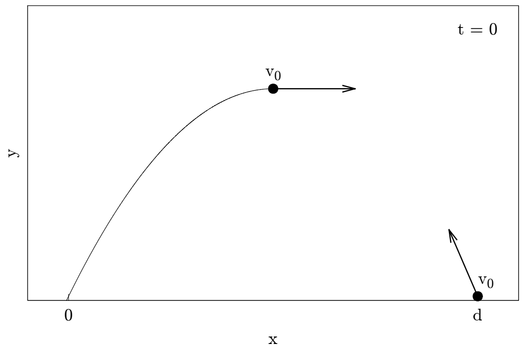
A PARTÍCULA ATINGE O ANTEPARO NO INSTANTE $t = \frac{(l+L)}{V_0}$,

LOGO:

$$Y\left(t = \frac{l+L}{V_0}\right) = \frac{F}{m}\frac{l}{V_0}\left(\frac{l+L}{V_0}\right) - \frac{1}{2}\frac{F}{m}\frac{l^2}{V_0^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y = \frac{Fl}{mV_0^2}\left(L + \frac{l}{2}\right)}$$

4) Um projétil é lançado por um canhão para atingir um alvo a uma distância $d$, situada à mesma altura, com velocidade inicial $v_0$. Um míssil balístico defensivo é lançado a partir do alvo, também a velocidade $v_0$, quando o projétil atinge a sua altura máxima. Despreze a resistência do ar e considere a aceleração da gravidade como $g$. Considere o míssil também em queda livre e tome o instante $t = 0$ quando o míssil é lançado.




a) (0,25 pt.) Calcule a altura máxima atingida pelo projétil.

*Altura máxima atingida pelo projétil:* $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \theta$.

b) (0,75 pt.) Supondo que o ângulo de lançamento do míssil defensivo é suplementar ao de lançamento do projétil, determine esse ângulo em termos das quantidades dadas no enunciado.

*Como os módulos das velocidades são iguais, o ângulo do míssil deve ser suplementar ao do projétil.*
*Para que o projétil atinja o alvo, devemos ter* $\theta = \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{gd}{v_0^2} \right)$. *Logo,* $\theta_1 = \pi - \theta$.

b) (0,75 pt.) Calcule os tempos de voo do projétil e do míssil até eles colidirem.

$t_e = \frac{h_{\max}}{v_0 \sin \theta} = \frac{v_0 \sin \theta}{2g} = \frac{d}{4 v_0 g \cos \theta}$

c) (0,75 pt.) A que distância do alvo o míssil atinge o projétil?

*Em x:* $x_e = v_0 \cos \theta t_e = \frac{d}{4}$
*Em y:* $y_e = v_0 \sin \theta t_e - \frac{g t_e^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$
*Distância:* $r = \sqrt{x_e^2 - y_e^2} = \sqrt{\frac{d^2}{16} + \frac{v_0^4 \sin^4 \theta}{4g^2}}$