1) O vetor posição de uma partícula que se move no plano XZ ´e dado por:

$$\mathbf{r} = (2t^3 + t^2)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{k}$$

onde $\mathbf{r}$ é dado em metros e t em segundos. Determine:

(a) (1,0) o vetor velocidade instantânea da partícula, seu módulo e direção, para o instante $t = 1,0\ s$.

(b) (0,5) o vetor aceleração instantânea da partícula para o instante $t = 2,0s$.

(c) (0,5) o vetor deslocamento da partícula entre os instantes de tempo $t_1 = 1,0s$ e $t_2 = 2,0\ s$:

(d) (0,5) o vetor velocidade média da partícula no intervalo de tempo $t_1 = 1,0s$ e $t_2 = 2,0\ s$.

SOLUÇÃO:

(a)

O vetor velocidade instantânea pode ser obtido pela derivação do vetor posição em função do tempo, ou seja:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = (6t^2 + 2t)\mathbf{i} + 6t\mathbf{k}$$

Portanto o vetor velocidade instantânea para $t = 1\ s$ vale:

$$\mathbf{v}(1) = (8\mathbf{i} + 6\mathbf{k})m/s$$

e o módulo vale:

$$\mathbf{v}(1) = \sqrt{(8^2 + 6^2)} = 10m/s$$

(b)

O vetor aceleração instantânea pode ser obtido pela derivação do vetor velocidade em função do tempo, ou seja:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = (12t + 2)\mathbf{i} + 6\mathbf{k}$$

Portanto o vetor aceleração instantânea para $t = 2\ s$ vale:

$$\mathbf{a}(2) = (26\mathbf{i} + 6\mathbf{k})m/s^2$$

(c)

As posições para os instantes $t = 1\ s$ e $t = 2\ s$ valem:

$$\mathbf{r}(1) = (3\mathbf{i} + 3\mathbf{k})m$$
$$\mathbf{r}(2) = (20\mathbf{i} + 12\mathbf{k})m$$

Portanto do deslocamento é igual a:

$$\mathbf{r}(2) - \mathbf{r}(1) = (20 - 3)\mathbf{i} + (12 - 3)\mathbf{k}$$
$$\Delta\mathbf{r} = (17\mathbf{i} + 9\mathbf{k})m$$

(d)

A velocidade média pode ser obtida pela razão $\mathbf{v}_m = \Delta\mathbf{r}/\Delta t$ logo temos que:

$$\mathbf{v}_m = (17\mathbf{i} + 9\mathbf{k})m/s$$

2) Um projétil é disparado do solo, direcionado a um ângulo de 60^o em relação à horizontal com velocidade inicial $|\vec{v}_o| = 32$ m/s. No mesmo instante em que é disparado, um alvo é abandonado a 16 m de altura, estando na mira da posição inicial do projétil (vide figura). Determine

a)(0.5) o vetor posição do alvo, no instante em que ele é abandonado.

$\tan 60^o = \frac{y}{x}$ $\qquad x = \frac{y}{\tan 60^o} = \frac{16}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \vec{r}_{oA} = \frac{16}{\sqrt{3}}\,\hat{i} + 16\,\hat{j}$ (m)

b)(1.0) o vetor posição e o vetor velocidade do alvo no instante em que ele é atingido pelo projétil.

– projétil: $x_p = v_{0xp}t = v_{0p}\cos(60)t = 16t$

– alvo: $x_A = \frac{16}{\sqrt{3}}$

– no instante em que alvo é atingido: $x_A = x_p$

$$\frac{16}{\sqrt{3}} = 16t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ s}$$

$y_A = y_{0A} - \frac{g}{2}t^2 = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow \quad \vec{r}_A = \frac{16}{\sqrt{3}}\,\hat{i} + \frac{43}{3}\,\hat{j}$ (m)

$v_{Ay} = v_{0Ay} - gt = 0 - \frac{10}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \quad \vec{v}_A = -\frac{10}{\sqrt{3}}\,\hat{j}$ (m/s)

c)(0.5) Supondo as mesmas condições iniciais, onde apenas o módulo da velocidade inicial v_0 do projétil possa ser modificada: qual será o o intervalo possível para v_0 (onde v_0 é sempre positivo), de forma que o projétil atinja o alvo enquanto este estiver em movimento?

– alvo: $x_A = \frac{16}{\sqrt{3}}$

– projétil: $x_p = v_{0xp}t = v_{0p}\cos(60)t = \frac{1}{2}v_0 t$

– instante em que alvo será atingido: $x_A = x_p \quad \Rightarrow t = \frac{32}{\sqrt{3}v_0}$

– para que o projétil atinja o alvo em movimento: $y_A > 0$

$$y_A = 16 - \frac{5\times 32^2}{3v_0^2} > 0$$

$$\Rightarrow v_0 > 8\sqrt{\frac{5}{3}}\ \text{(m/s)}$$

3) Num “videogame”, você deve posicionar uma pistola e ajustar a velocidade do projétil de forma a atingir duas vezes a bolinha b que executa movimento circular uniforme (MCU). A posicão y da pistola é fixa e vale $y_p = \sqrt{2}/2$ m como mostra a figura. A bolinha gira no sentido anti-horário num círculo de raio 1m e com velocidade angular $\omega = 3\pi/8$ rad/s. A pistola é disparada em $t = 0$ quando a bolinha está na posicão $x = 1$ e $y = 0$. Despreze o tamanho da pistola e considere que o movimento da bolinha não é afetado quando o projétil o atinge.

a) (1,0) Escreva a equacão horária da bolinha e do projétil na forma $\vec{r} = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$, dado que o projétil é disparado com velocidade v paralela ao eixo x e que a distância entre o projétil e o centro do MCU é l (considere também a origem do sistema de coordenadas neste ponto), como mostrado na figura. Os resultados devem ser expressos em termos de l e v.

– bolinha: dado que $x(t=0) = 1$ e $y(t=0) = 0$ m:

$x_b = r\cos(\omega t)$

$y_b = r\sin(\omega t)$

dado que $r = 1 \Rightarrow \Rightarrow \quad \vec{r_b} = \cos(\frac{3\pi}{8}t)\,\hat{i} + \sin(\frac{3\pi}{8}t)\,\hat{j}$ (m)

– projétil: $x_p = -l + vt \qquad y_p = \sqrt{2}/2$

$\Rightarrow \vec{r_p} = (-l + vt)\,\hat{i} + \sqrt{2}/2\,\hat{j}$ (m)

c) (0,5) Determine a velocidade v do projétil.

– colisões: $\Rightarrow x_b = x_p \Rightarrow \cos(wt) = -l + vt$

$\Rightarrow y_b = y_p \Rightarrow \sin(wt) = \sqrt{2}/2$

– desta última relacão: $\omega t = \frac{3\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}, \cdots = \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \cdots$

– intervalo de tempo entre duas colisões: $\Delta t = \frac{\Delta\theta_b}{\omega} = \frac{\Delta x_p}{v}$

onde Δx_p corresponde a distância percorrida pelo projétil entre as duas colisões: $\Delta x_p = r\left(\cos(\frac{9\pi}{4}) - \cos(\frac{3\pi}{4})\right) = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ m e $\Delta\theta = \frac{9\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow v = \frac{\omega\Delta x_p}{\Delta\theta} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ m/s

c) (0,5) determine a distância l mínima para que ocorram as duas colisões.

– intervalo de tempo entre duas colisões: $\Delta t = \frac{\Delta\theta_b}{\omega} = \frac{\Delta x_p}{v} = \frac{l}{v} \Rightarrow l = \frac{v\Delta\theta}{\omega} = \sqrt{2}$ m.

d) (0,5) Em que instante ocorre a primeira colisão ? E a segunda?

– 1a. colisão : $\omega t_1 = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow t_1 = 2$ s

– 2a. colisão : $\omega t_2 = \frac{9\pi}{4} \Rightarrow t_2 = 6$ s

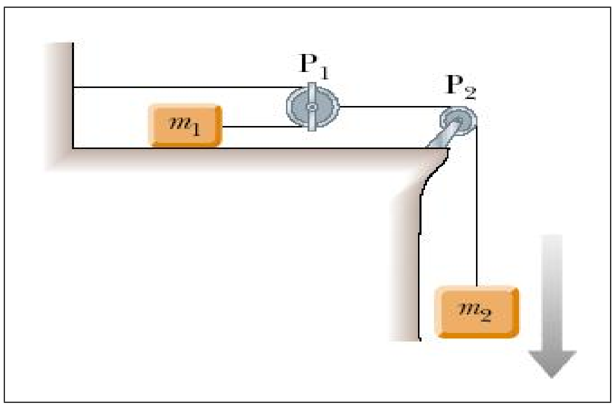
4) Na figura ao lado tem-se uma massa m_1 que está conectada a uma massa m_2 através das polias $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ que tem massas despreziveis. Supondo que a massa m_1 desliza sobre mesa sem atrito e que a aceleração da massa m_2 é vertical e para baixo, pede-se:

(a) (0,5) Coloque em um diagrama todas as forças que atuam no sitema.

(b) (0,5) Determinar o valor numérico da razão a_1/a_2, considerando os fios inextensíveis.

(c) (1,0) Determinar as trações $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ em função de g, m_1 e m_2.

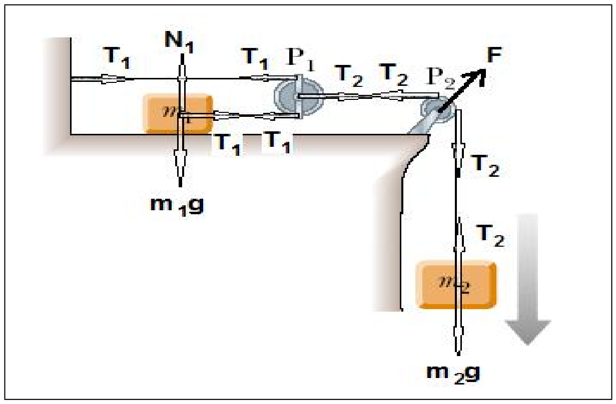
(d) (0,5) Determinar as acelerações a_1 e a_2.



SOLUÇÃO:

(a)

As forças que atuam no sistema estão representadas na figura abaixo.



(b)

Quando a massa m_2 se desloca de um comprimento L a massa m_1 se desloca de um comprimento $2L$ portanto $a_1 = 2a_2$, logo

$$\frac{a_1}{a_2} = 2$$

(c)

Vamos primeiramente escrever as equações de movimentos para os três corpos que possuem aceleração diferente de zero que são as massas m_1 e m_2 e a polia P_1.

$$T_1 = m_1 a_1 \quad (1)$$
$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \quad (2)$$
$$T_2 - 2T_1 = m_{p1} a_2 = 0 \quad (3)$$

onde m_{p1} é a massa da polia 1 que é igual a zero. Substituindo a equação (**3**) em (**2**) obtemos:

$$m_2 g - 2T_1 = m_2 a_2 \Longrightarrow 2T_1 = m_2 g - m_2 a_2 = m_2 g - m_2 \frac{a_1}{2} = m_2 g - m_2 \frac{T_1}{2m_1}$$
$$2T_1 + m_2 \frac{T_1}{2m_1} = m_2 g \Longrightarrow T_1 \left(2 + \frac{m_2}{2m_1}\right) = T_1 \left(\frac{4m_1 + m_2}{2m_1}\right) = m_2 g$$

Logo T_1 vale:

$$T_1 = \frac{2m_1m_2g}{4m_1 + m_2}$$

e T_2 vale:

$$T_2 = \frac{4m_1m_2g}{4m_1 + m_2}$$

(d)

Uma vez conhecida as trações podemos obter as acelerações a partir das equações (**1**) e (**2**), ou seja:

$$a_1 = \frac{2m_2g}{4m_1 + m_2} \text{ e } a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{m_2g}{4m_1 + m_2}$$